

平成 26 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分

理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
発達科学 (人間環境 (理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 a を実数とし, $f(x) = xe^x - x^2 - ax$ とする. 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(0, f(0))$ における接線の傾きを -1 とする. このとき, 以下の間に答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ.
- (3) b を実数とすると, 2 つの曲線 $y = xe^x$ と $y = x^2 + ax + b$ の $-1 \leq x \leq 1$ の範囲での共有点の個数を調べよ.

2 m, n ($m < n$) を自然数とし

$$a = n^2 - m^2, \quad b = 2mn, \quad c = n^2 + m^2$$

とおく. 三辺の長さが a, b, c である三角形の内接円の半径を r とし, その三角形の面積を S とする. このとき, 以下の間に答えよ.

- (1) $a^2 + b^2 = c^2$ を示せ.
- (2) r を m, n を用いて表せ.
- (3) r が素数のときに, S を r を用いて表せ.
- (4) r が素数のときに, S が 6 で割り切れることを示せ.

3 空間において, 原点 O を通らない平面 α 上に一辺の長さ 1 の正方形があり, その頂点を順に A, B, C, D とする. このとき, 以下の間に答えよ.

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OD}$ を, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を用いて表せ.
- (2) $OA = OB = OC$ のとき, ベクトル

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

が, 平面 α と垂直であることを示せ.

4 n を自然数とする. 1 から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードを袋に入れ, よくかき混ぜて n 枚を取り出し, 取り出した n 枚のカードの数字の合計を A , 残された n 枚のカードの数字の合計を B とする. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) n が奇数のとき, A と B が等しくないことを示せ.
- (2) n が偶数のとき, A と B の差は偶数であることを示せ.
- (3) $n = 4$ のとき, A と B が等しい確率を求めよ.

5 a, b を正の実数とし, xy 平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(a, b)$ をとる. 三角形 OAB を, 原点 O を中心に 90° 回転するとき, 三角形 OAB が通過してできる図形を D とする. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) D を xy 平面上に図示せよ.
- (2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.
- (3) $a + b = 1$ のとき, (2) で求めた V の最小値と, そのときの a の値を求めよ.

解答例

1 (1) $f(x) = xe^x - x^2 - ax$ より $f'(x) = (x+1)e^x - 2x - a$

$f'(0) = -1$ であるから $1 - a = -1$ よって $a = 2$

(2) (1) の結果から $f'(x) = (x+1)e^x - 2x - 2 = (x+1)(e^x - 2)$

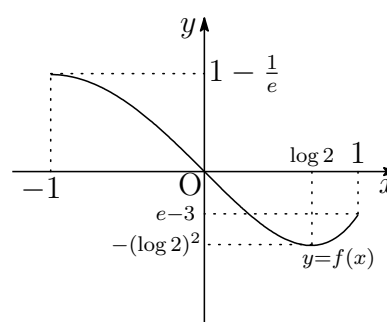
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって 極大値 $f(-1) = 1 - \frac{1}{e}$, 極小値 $f(\log 2) = -(\log 2)^2$

(3) 2つの曲線 $y = xe^x$ と $y = x^2 + 2x + b$ の共有点の個数は、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = b$ の共有点の個数である。

(2) の結果および $f(1) = e - 3$ から、 $-1 \leq x \leq 1$ における $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

したがって、求める共有点の個数は



$b < -(\log 2)^2, 1 - \frac{1}{e} < b$ のとき 0 個

$b = -(\log 2)^2, e - 3 < b \leq 1 - \frac{1}{e}$ のとき 1 個

$-(\log 2)^2 < b \leq e - 3$ のとき 2 個



- 2** (1) $a = n^2 - m^2$, $b = 2mn$, $c = n^2 + m^2$ より

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= n^4 + 2n^2m^2 + m^4 = (n^2 + m^2)^2 = c^2 \end{aligned}$$

- (2) (1) の結果から，斜辺の長さが c の直角三角形であるから，この三角形の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot (n^2 - m^2) \cdot 2mn = mn(n + m)(n - m)$$

三角形の内接円の半径が r であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(a + b + c)r \\ &= \frac{1}{2}\{(n^2 - m^2) + 2mn + (n^2 + m^2)\}r \\ &= n(n + m)r \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

したがって $n(n + m)r = mn(n + m)(n - m)$ よって $r = m(n - m)$

- (3) r が素数のとき，(2) の結果から $m = 1$ または $n - m = 1$

- (i) $m = 1$ のとき，これを (2) の結果に代入すると

$$r = 1(n - 1) \quad \text{ゆえに} \quad n = r + 1$$

これらを (*) に代入すると

$$S = (r + 1)\{(r + 1) + 1\}r = r(r + 1)(r + 2)$$

- (ii) $n - m = 1$ のとき，これを (2) の結果に代入すると

$$r = m \cdot 1 \quad \text{すなわち} \quad m = r, \quad n = r + 1$$

これらを (*) に代入すると

$$S = (r + 1)\{(r + 1) + r\}r = r(r + 1)(2r + 1)$$

よって $S = r(r + 1)(r + 2)$ または $S = r(r + 1)(2r + 1)$

- (4) $r(r + 1)(r + 2)$ は連続する 3 整数の積である．また

$$\begin{aligned} r(r + 1)(2r + 1) &= r(r + 1)\{(r - 1) + (r + 2)\} \\ &= (r - 1)r(r + 1) + r(r + 1)(r + 2) \end{aligned}$$

これは連続する 3 整数 (2 の倍数と 3 の倍数を含む) の積の和．

よって，(3) の結果から， r が素数のとき， S は 6 で割り切れる。 ■

3 (1) 四角形 ABCD は正方形であるから

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

(2) 正方形 ABCD の対角線の交点を G とし

$$\overrightarrow{OG} = \vec{g}, \quad \overrightarrow{GA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{GB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{GC} = -\vec{a}, \quad \overrightarrow{GD} = -\vec{b}$$

とすると

$$\overrightarrow{OA} = \vec{g} + \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{g} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{g} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{OD} = \vec{g} - \vec{b}$$

OA = OB = OC より, $|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2$ であるから

$$|\vec{g} + \vec{a}|^2 = |\vec{g} + \vec{b}|^2 = |\vec{g} - \vec{a}|^2$$

このとき, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ に注意して, 上式を整理すると

$$\vec{g} \cdot \vec{a} = \vec{g} \cdot \vec{b} = -\vec{g} \cdot \vec{a} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{g} \cdot \vec{a} = \vec{g} \cdot \vec{b} = 0$$

また, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\vec{g}$ であるから

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

は, $\vec{a}$ および $\vec{b}$ と垂直, すなわち, 平面 α と垂直である.

別解 (1) の結果から $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{CA} &= 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) \\ &= 2(|\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2) = 0 \end{aligned}$$

2 点 A, C の中点を M とすると $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OM}$

以上より, $OM \perp MC$ となる. これから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OC}|^2 &= |\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2, \\ |\overrightarrow{OB}|^2 &= |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MB} + |\overrightarrow{MB}|^2 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OB}|$, $|\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB}|$ であるから $OM \perp MB$

よって, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ は, 平面 α と垂直である. ■

- 4 (1) 1 から $2n$ までの $2n$ 枚のカードすべての数字の合計を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2n(2n+1) = n(2n+1)$$

n が奇数のとき, $2n+1$ も奇数であり, この合計は奇数である.

A と B の数字の合計が奇数であるから, A と B は等しくない.

- (2) n が偶数のとき, S は偶数で, $A+B=S$ であるから

$$A-B=S-2B$$

上式の右辺は偶数であるから, $A-B$ は偶数である.

- (3) $n=4$ のとき, $S=36$

$A=B$ のとき, $S=A+B$ より $A=B=18$

2つの集合

$$P = \{1, 2, 3, 4\}, \quad Q = \{5, 6, 7, 8\}$$

を考える. A の要素は, P, Q からそれぞれ2枚ずつとったものである.

- P から3枚, Q から1枚選ぶ場合:

P の要素の最大3つの和は $2+3+4=9$ であり, Q の要素の最大は8なので, 合計しても最大で $9+8=17$ となり, 18に届かない.

- P から1枚, Q から3枚選ぶ場合:

P の要素の最小は1であり, Q の要素の最小3つの和は $5+6+7=18$ なので, 合計すると最低でも $1+18=19$ となり, 18を超える.

したがって, P, Q の要素の組み合わせは次のようになる.

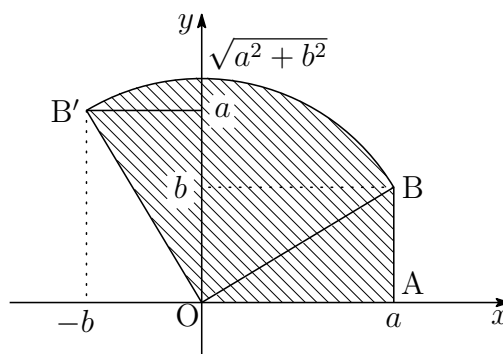
P	Q
$\{1, 2\}$	$\{7, 8\}$
$\{1, 3\}$	$\{6, 8\}$
$\{1, 4\}, \{2, 3\}$	$\{5, 8\}, \{6, 7\}$
$\{2, 4\}$	$\{5, 7\}$
$\{3, 4\}$	$\{5, 6\}$

よって. 求める確率は

$$\frac{1+1+2+2+1+1}{{}_8C_4} = \frac{8}{70} = \frac{4}{35}$$



- 5 (1) D は下図の斜線部分で境界線を含む.



- (2) (1) の図の $\widehat{BB'}$ は中心が原点で半径 $\sqrt{a^2 + b^2}$ の円

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

の一部であるから

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-b}^a y^2 dx - \frac{1}{3} \cdot \pi a^2 \cdot b \\ &= \pi \int_{-b}^a (a^2 + b^2 - x^2) dx - \frac{1}{3} \pi a^2 b \\ &= \pi \left[(a^2 + b^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{-b}^a - \frac{1}{3} \pi a^2 b \\ &= \pi \left\{ (a^2 + b^2)(a + b) - \frac{a^3 + b^3}{3} \right\} - \frac{1}{3} \pi a^2 b \\ &= \frac{\pi}{3} (2a^3 + 2a^2b + 3ab^2 + 2b^3) \end{aligned}$$

別解 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \angle AOB$ とおくと, $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$ より ¹

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \pi r^3 \int_{\varphi}^{\varphi + \frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta + \frac{1}{3} \cdot \pi b^2 \cdot a \\ &= \frac{2}{3} \pi r^3 \left[-\cos \theta \right]_{\varphi}^{\varphi + \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} \pi ab^2 \\ &= \frac{2}{3} \pi r^2 (r \sin \varphi + r \cos \varphi) + \frac{1}{3} \pi ab^2 \\ &= \frac{2}{3} \pi (a^2 + b^2)(b + a) + \frac{1}{3} \pi ab^2 = \frac{\pi}{3} (2a^3 + 2a^2b + 3ab^2 + 2b^3) \end{aligned}$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2016.pdf 5 参照

(3) (2) の結果から $V = \frac{\pi}{3}\{2(a+b)(a^2+b^2) + ab^2\}$

$a+b=1$ および $b=1-a$ を上式に代入すると

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3}\{2a^2 + 2(1-a)^2 + a(1-a)^2\} \\ &= \frac{\pi}{3}(a^3 + 2a^2 - 3a + 2) \end{aligned}$$

$a > 0, b > 0, a+b=1$ より $0 < a < 1$

$$f(a) = a^3 + 2a^2 - 3a + 2 \quad (0 < a < 1)$$

とおくと $f'(a) = 3a^2 + 4a - 3$

$f'(a) = 0$ を解くと $a = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}$

$0 < a < 1$ に注意して, $c = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}$ とおく.

a	(0)	$\cdots$	c	$\cdots$	(1)
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

ここで $f(a) = f'(a) \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{9} \right) - \frac{26}{9}a + \frac{8}{3}$

$f'(c) = 0$ であるから

$$f(c) = -\frac{26}{9}c + \frac{8}{3} = -\frac{26}{9} \cdot \frac{-2 + \sqrt{13}}{3} + \frac{8}{3} = \frac{124 - 26\sqrt{13}}{27}$$

よって, $a = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}$ のとき, 求める最小値は

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{124 - 26\sqrt{13}}{27} = \frac{124 - 26\sqrt{13}}{81} \pi$$

