

平成 25 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分

理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
発達科学 (人間環境 (理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 空間において、2 点 $A(0, 1, 0)$, $B(-1, 0, 0)$ を通る直線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 点 P を ℓ 上に、点 Q を z 軸上にとる。 $\overrightarrow{PQ}$ がベクトル $(3, 1, -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ。
- (2) 点 R を ℓ 上に、点 S を z 軸上にとる。 $\overrightarrow{RS}$ が $\overrightarrow{AB}$ およびベクトル $(0, 0, 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ。
- (3) R, S を (2) で求めた点とする。点 T を ℓ 上に、点 U を z 軸上にとる。また、 $\vec{v} = (a, b, c)$ は零ベクトルではなく、 $\overrightarrow{RS}$ に垂直ではないとする。 $\overrightarrow{TU}$ が $\vec{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ。

2 p, r を $-r < p < r$ をみたす実数とする。4 点 $P(p, p^2)$, $Q(r, p^2)$, $R(r, r^2)$, $S(p, r^2)$ に対し、線分 PR の長さは 1 であるとする。このとき、長方形 $PQRS$ の面積の最大値と、そのときの P, R の x 座標をそれぞれ求めよ。

3 c を $0 < c < 1$ をみたす実数とする。 $f(x)$ を 2 次以下の多項式とし、曲線 $y = f(x)$ が 3 点 $(0, 0)$, $(c, c^3 - 2c)$, $(1, -1)$ を通るとする。次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = x^3 - 2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた S を最小にするような c の値を求めよ。

4 a, b を実数とする。次の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = a \cos x + b$ が、

$$\int_0^\pi f(x) dx = \frac{\pi}{4} + \int_0^\pi \{f(x)\}^3 dx$$

をみたすとする。このとき、 a, b がみたす関係式を求めよ。

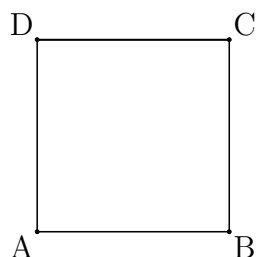
- (2) (1) で求めた関係式をみたす正の数 b が存在するための a の条件を求めよ。

- 5 動点 P が、図のような正方形 $ABCD$ の頂点 A から出発し、さいころをふるごとに、次の規則により正方形のある頂点から他の頂点に移動する.

出た目の数が 2 以下なら辺 AB と平行な方向に移動する.

出た目の数が 3 以上なら辺 AD と平行な方向に移動する.

n を自然数とすると、さいころを $2n$ 回ふった後に動点 P が A にいる確率を a_n , C にいる確率を c_n とする. 次の問いに答えよ.



- (1) a_1 を求めよ.
- (2) さいころを $2n$ 回ふった後、動点 P は A または C にいることを証明せよ.
- (3) a_n , c_n を n を用いてそれぞれ表せ.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ をそれぞれ求めよ.

解答例

- 1 (1) P は直線 AB 上の点であるから, 実数 α を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) + \alpha(-1, -1, 0) = (-\alpha, 1 - \alpha, 0)$$

点 Q を $(0, 0, q)$ とおくと

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (0, 0, q) - (-\alpha, 1 - \alpha, 0) = (\alpha, \alpha - 1, q)$$

$\overrightarrow{PQ}$ がベクトル $(3, 1, -1)$ に平行であるから

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha - 1}{1} = \frac{q}{-1} \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{3}{2}, \quad q = -\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OP} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \text{ であるから } P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), Q\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

- (2) R は直線 AB 上の点であるから, 実数 β を用いて $\overrightarrow{OR} = (-\beta, 1 - \beta, 0)$

点 S を $(0, 0, s)$ とおくと $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} = (\beta, \beta - 1, s)$

$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 0)$ およびベクトル $(0, 0, 1)$ に垂直なベクトルの 1 つは
 $(1, -1, 0)$

$\overrightarrow{RS}$ はこのベクトルと平行であるから $\frac{\beta}{1} = \frac{\beta - 1}{-1}, s = 0$

これを解いて $\beta = \frac{1}{2}$ ゆえに $R\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), S(0, 0, 0)$

- (3) $\overrightarrow{RS} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ は $\vec{v} = (a, b, c)$ に垂直ではないから

$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \neq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a - b \neq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

T は直線 AB 上の点であるから, 実数 t を用いて $\overrightarrow{OT} = (-t, 1 - t, 0)$

点 U を $(0, 0, u)$ とおくと $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{OU} - \overrightarrow{OT} = (t, t - 1, u)$

$\overrightarrow{TU}$ は $\vec{v} = (a, b, c)$ に平行であるから, 実数 k を用いて

$$\overrightarrow{TU} = k\vec{v} \quad \text{ゆえに} \quad (t, t - 1, u) = k(a, b, c)$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} t = ka \\ t - 1 = kb \\ u = kc \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad k(a - b) = 1 \quad \textcircled{1} \text{ より} \quad k = \frac{1}{a - b}$$

$$t = \frac{a}{a - b}, u = \frac{c}{a - b} \text{ より } T\left(\frac{a}{b - a}, \frac{b}{b - a}, 0\right), U\left(0, 0, \frac{c}{a - b}\right)$$

■

2 $PR^2 = 1$ であるから

$$(r-p)^2 + (r^2 - p^2)^2 = 1$$

$$(r-p)^2 \{1 + (r+p)^2\} = 1 \quad \dots (*)$$

長方形 PQRS の面積を T とすると

$$T = (r-p)(r^2 - p^2) = (r-p)^2(r+p)$$

(*) より $(r-p)^2 = \frac{1}{1 + (r+p)^2}$ これを上式に代入すると

$$T = \frac{r+p}{1 + (r+p)^2} = \frac{1}{\frac{1}{r+p} + (r+p)}$$

$r+p > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{r+p} + (r+p) \geq 2\sqrt{\frac{1}{r+p} \cdot (r+p)} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad T \leq \frac{1}{2}$$

上の不等式において、等号が成立するとき

$$\frac{1}{r+p} = r+p \quad \text{すなわち} \quad r+p = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

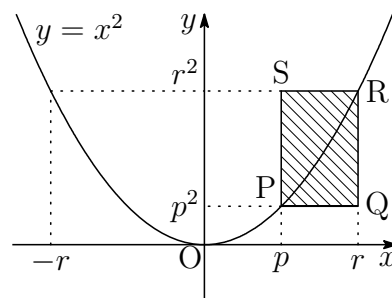
① を (*) に代入すると ($r-p > 0$)

$$(r-p)^2(1+1^2) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad r-p = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \dots \textcircled{2}$$

$-r < p < r$ に注意して、①, ② を解くと

$$p = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}, \quad r = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

このとき、PQRS の面積は最大値 $\frac{1}{2}$ をとる. ■



3 (1) $y = f(x)$ が点 $(0, 0)$ を通るから, $f(x) = ax^2 + bx$ とおく.

$y = f(x)$ が $(c, c^3 - 2c)$, $(1, -1)$ を通るから, $c \neq 0$ に注意して

$$\begin{cases} ac^2 + bc = c^3 - 2c \\ a + b = -1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \quad \begin{cases} ac + b = c^2 - 2 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

(*) で b を消去すると $(c-1)a = c^2 - 1$

$c \neq 1$ であるから $a = c+1$ これを (*) の第2式に代入して

$$b = -c - 2 \quad \text{よって} \quad f(x) = (c+1)x^2 - (c+2)x$$

(2) $g(x) = x^3 - 2x - f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 - (c+1)x^2 + cx \\ &= x(x-c)(x-1) \end{aligned}$$

ゆえに $0 \leq x \leq c$ で $g(x) \geq 0$, $c \leq x \leq 1$ で $g(x) \leq 0$

$g(x)$ の原始関数の1つを

$$G(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(c+1)x^3 + \frac{1}{2}cx^2$$

$$\text{とおくと} \quad G(0) = 0, \quad G(1) = \frac{1}{6}c - \frac{1}{12}, \quad G(c) = -\frac{1}{12}c^4 + \frac{1}{6}c^3$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad S &= \int_0^c g(x) dx - \int_c^1 g(x) dx = 2G(c) - G(0) - G(1) \\ &= -\frac{1}{6}c^4 + \frac{1}{3}c^3 - \frac{1}{6}c + \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (2) \text{の結果から} \quad \frac{dS}{dc} &= -\frac{2}{3}c^3 + c^2 - \frac{1}{6} \\ &= -\frac{1}{6}(2c-1)(2c^2-2c-1) \\ &= \frac{1}{6}(2c-1)\{2c(1-c)+1\} \end{aligned}$$

$0 < c < 1$ のとき, $2c(1-c)+1 > 0$ であるから, S の増減表は

c	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dS}{dc}$		-	0	+	
S		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって, S を最小にする c の値は $c = \frac{1}{2}$



$$\begin{aligned}
 \boxed{4} \quad (1) \quad & \int_0^\pi \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_0^\pi = 0, \\
 & \int_0^\pi \cos^2 x \, dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}, \\
 & \int_0^\pi \cos^3 x \, dx = \int_0^\pi \cos x (1 - \sin^2 x) \, dx = \left[\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^\pi = 0
 \end{aligned}$$

$$f(x) = a \cos x + b \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi f(x) \, dx &= a \int_0^\pi \cos x \, dx + b \int_0^\pi dx = b\pi, \\
 \int_0^\pi \{f(x)\}^3 \, dx &= a^3 \int_0^\pi \cos^3 x \, dx + 3a^2b \int_0^\pi \cos^2 x \, dx \\
 &\quad + 3ab^2 \int_0^\pi \cos x \, dx + b^3 \int_0^\pi dx \\
 &= \frac{3}{2}a^2b\pi + b^3\pi
 \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi f(x) \, dx = \frac{\pi}{4} + \int_0^\pi \{f(x)\}^3 \, dx \text{ をみたすから}$$

$$b\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}a^2b\pi + b^3\pi \quad \text{よって} \quad \mathbf{6a^2b + 4b^3 - 4b + 1 = 0}$$

$$(2) \quad b > 0 \text{ であるから, (1) の結果より } 6a^2 = -4b^2 + 4 - \frac{1}{b} \quad \cdots (*)$$

$$g(b) = -4b^2 + 4 - \frac{1}{b} \text{ とおくと } (b > 0)$$

$$g'(b) = -8b + \frac{1}{b^2} = \frac{1 - 8b^3}{b^2}$$

b	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(b)$		$+$	0	$-$
$g(b)$		$\nearrow$	1	$\searrow$

$$\lim_{b \rightarrow +0} g(b) = -\infty, \quad \lim_{b \rightarrow \infty} g(b) = -\infty$$

したがって, (*) をみたす a が存在するとき

$$6a^2 \leq 1 \quad \text{すなわち} \quad -\frac{1}{\sqrt{6}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{6}}$$

■

- 5 (1) 出た目が2回とも2以下、または、3以上である確率であるから

$$a_1 = \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

- (2) c_1 は、2以下と3以上が1回ずつ出る確率であるから

$$c_1 = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times 2 = \frac{4}{9}$$

規則より、1回さいころを振ると、動点Pは必ず「{A, C} から {B, D}」または「{B, D} から {A, C}」へと移動する．このように1回ごとに2つのグループを交互に行き来するため、奇数回後は必ずBまたはDにあり、偶数回 $2n$ 回後は必ずAまたはCにある．

したがって、次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_1 a_n + c_1 c_n \\ c_{n+1} = c_1 a_n + a_1 c_n \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad (*) \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{5}{9} a_n + \frac{4}{9} c_n \\ c_{n+1} = \frac{4}{9} a_n + \frac{5}{9} c_n \end{cases}$$

(*) の辺々を加えると $a_{n+1} + c_{n+1} = a_n + c_n$

$$\text{したがって} \quad a_n + c_n = a_1 + c_1 = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

よって、動点PはAまたはCにいる．

- (3) (*) の第1式から第2式を引くと

$$a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{9}(a_n - c_n)$$

$\{a_n - c_n\}$ は初項 $a_1 - c_1 = \frac{1}{9}$ 、公比 $\frac{1}{9}$ の等比数列であるから

$$a_n - c_n = (a_1 - c_1) \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{9^n} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad a_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{9^n}\right), \quad c_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{9^n}\right)$$

- (4) (3) の結果から $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{2}$ ■