

平成 24 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分

理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
発達科学 (人間環境 (理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 座標平面上に 2 点 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ と直線 ℓ があり, A と ℓ の距離と B と ℓ の距離の和が 1 であるという. 以下の問に答えよ.

- (1) ℓ は y 軸と平行でないことを示せ.
- (2) ℓ が線分 AB と交わるとき, ℓ の傾きを求めよ.
- (3) ℓ が線分 AB と交わらないとき, ℓ と原点との距離を求めよ.

2 x を実数とし, $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = A - xE$ とおく. P は $P^2 = P$ をみたすとする. 以下の問に答えよ.

- (1) x の値を求めよ.
- (2) n を自然数とする.

$$A^n = a_n P + b_n E$$

をみたす a_n , b_n を n を用いて表せ.

3 $x > 0$ に対し関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

と定め, $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ とおく. 以下の問に答えよ.

- (1) $\frac{d}{dx} f(x)$ を求めよ.
- (2) $\frac{d}{dx} g(x)$ を求めよ.
- (3) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ を求めよ.

4 自然対数の底を e とする．以下の問に答えよ．

(1) $e < 3$ であることを用いて，不等式 $\log 2 > \frac{3}{5}$ が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} - x$ の導関数を求めよ．

(3) 積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x} dx$$

の値を求めよ．

(4) (3) で求めた値が正であるか負であるかを判定せよ．

5 座標平面上の曲線 C を，媒介変数 $0 \leq t \leq 1$ を用いて

$$\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) 曲線 C の概形を描け．

(2) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分が， y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

解答例

- 1** (1) y 軸と平行な直線 ℓ の方程式を $x = k$ とおくと (k は定数)

$$A(1, 0) \text{ と } \ell \text{ の距離は } |k - 1|$$

$$B(-1, 0) \text{ と } \ell \text{ の距離は } |k + 1|$$

一般に, 2 つの実数 a, b について

$$|a| + |b| = \max(|a + b|, |a - b|)$$

であるから, $a = k - 1, b = k + 1$ とすると

$$|k - 1| + |k + 1| = \max(|2k|, 2)$$

$|k - 1| + |k + 1| \geq 2$ であるから, このとき, A と ℓ の距離と B と ℓ の距離の和が 2 以上となり, 条件に反する. よって, ℓ は y 軸と平行でない.

- (2) ℓ の傾きを m とし, その方程式を $mx - y + n = 0$ とすると, 条件から

$$\frac{|m + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{|-m + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

$$\text{したがって} \quad \frac{|m + n| + |-m + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \quad \dots (*)$$

ここで, $f(x, y) = mx - y + n$ とおくと

$$f(1, 0) = m + n, \quad f(-1, 0) = -m + n$$

ℓ が線分 AB と交わるから

$$f(1, 0)f(-1, 0) \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (m + n)(-m + n) \leq 0$$

$$\text{このとき} \quad |m + n| + |-m + n| = |(m + n) - (-m + n)| = |2m|$$

$$\text{これを } (*) \text{ に代入して} \quad \frac{|2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \quad \text{よって} \quad m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- (3) ℓ と原点の距離を d とすると $d = \frac{|n|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

ℓ が線分 AB と交わらないから

$$f(1, 0)f(-1, 0) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (m + n)(-m + n) \geq 0$$

$$\text{このとき} \quad |m + n| + |-m + n| = |(m + n) + (-m + n)| = |2n|$$

$$\text{これを } (*) \text{ に代入して} \quad \frac{|2n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \quad \text{よって} \quad d = \frac{|n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

- 2** (1) ハミルトン・ケリーの定理を行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に適用すると

$$A^2 - 5A + 6E = O$$

これから, $P = A - 2E$, $Q = -(A - 3E)$ とおくと ¹

$$PQ = QP = O, \quad P + Q = E, \quad P^2 = P, \quad Q^2 = Q, \quad A = 3P + 2Q$$

よって $x = 2$

- (2) $A = 3P + 2Q$ より

$$A^n = 3^n P + 2^n Q = 3^n P + 2^n (E - P) = (3^n - 2^n)P + 2^n E$$

よって $a_n = 3^n - 2^n$, $b_n = 2^n$ ■

- 3** (1) $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ より $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- (2) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} g(x) &= \frac{d}{dx} f\left(\frac{1}{x}\right) = f'\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

- (3) (1), (2) の結果から $\frac{d}{dx} \left\{ f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right\} = 0$

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ は定数であるから, これに $x = 1$ を代入すると

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2f(1) = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$t = \tan \theta \text{ とおくと } \frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \hline \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

よって $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ■

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2004.pdf> **2**

4 (1) $2^5 > 3^3 > e^3$ であるから $2 > e^{\frac{3}{5}}$ よって $\log 2 > \frac{3}{5}$

(2) $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} - x$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin x)'(1 + \cos x) - \sin x(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} - 1 \\ &= \frac{\cos x(1 + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} - 1 \\ &= \frac{1}{1 + \cos x} - 1 = -\frac{\cos x}{1 + \cos x} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果に注意して

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\cos x}{1 + \cos x} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{(1 + \cos x)'}{1 + \cos x} + f'(x) \right\} dx \\ &= \left[-\log(1 + \cos x) + \frac{\sin x}{1 + \cos x} - x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \log 2 + 1 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(4) (1) の結果を利用すると

$$\log 2 + 1 - \frac{\pi}{2} > \frac{3}{5} + 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{5} - \pi \right) > 0$$

よって, (3) で求めた値は 正

別解 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x} dx$

$$x = \frac{\pi}{2} - y \text{ とおくと } \frac{dx}{dy} = -1 \quad \begin{array}{c|c} x & \frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{2} \\ y & \frac{\pi}{4} \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos y - \sin y}{1 + \sin y} (-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x} dx$$

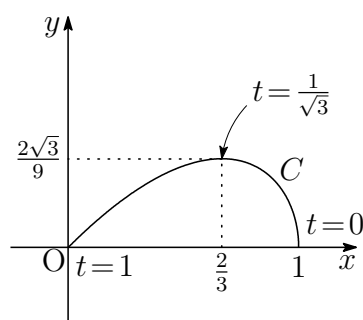
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x} + \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)^2}{(1 + \cos x)(1 + \sin x)} dx > 0 \end{aligned}$$



5 (1) $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1) \text{ より } \frac{dx}{dt} = -2t, \frac{dy}{dt} = 1 - 3t^2$

したがって, x, y の増減およびグラフの概形は次のようになる.

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$\frac{dx}{dt}$		-	-	-	
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	
$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$		$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	
(x, y)	(1, 0)	...	$(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9})$	...	(0, 0)



(2) $x = 1 - t^2$ より $\frac{dx}{dt} = -2t$

x	$0 \rightarrow 1$
t	$1 \rightarrow 0$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^1 xy \, dx \\
 &= 2\pi \int_1^0 (1 - t^2)(t - t^3)(-2t) \, dt \\
 &= 4\pi \int_0^1 (t^6 - 2t^4 + t^2) \, dt \\
 &= 4\pi \left[\frac{t^7}{7} - \frac{2}{5}t^5 + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{32}{105}\pi
 \end{aligned}$$

■