

平成23年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理・工・医(医・保健(検査技術科学))・農・
発達科学(人間環境(理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 $i = \sqrt{-1}$ とする. 以下の問に答えよ.

(1) 実数 α, β について, 等式

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

が成り立つことを示せ.

(2) 自然数 n に対して,

$$z = \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right)$$

とおくとき, 等式

$$z \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) = z$$

が成り立つことを示せ.

(3) 2以上の自然数 n について, 等式

$$\sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi k}{n} = 0$$

が成り立つことを示せ.

2 以下の問に答えよ.

(1) t を正の実数とすると, $|x| + |y| = t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ.

(2) a を $a \geq 0$ をみたす実数とする. x, y が連立不等式

$$\begin{cases} ax + (2-a)y \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

をみたすとき, $|x| + |y|$ のとりうる値の最小値 m を, a を用いた式で表せ.

(3) a が $a \geq 0$ の範囲を動くとき, (2) で求めた m の最大値を求めよ.

3 n を 2 以上の自然数として,

$$S_n = \sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k \log k}$$

とおく. 以下の問に答えよ.

- (1) $\int_n^{n^3} \frac{dx}{x \log x}$ を求めよ.
 (2) k を 2 以上の自然数とするとき,

$$\frac{1}{(k+1) \log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \log x} < \frac{1}{k \log k}$$

を示せ.

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ の値を求めよ.

4 a は正の無理数で, $X = a^3 + 3a^2 - 14a + 6$, $Y = a^2 - 2a$ を考えると, X と Y はともに有理数である. 以下の問に答えよ.

- (1) 整式 $x^3 + 3x^2 - 14x + 6$ を整式 $x^2 - 2x$ で割ったときの商と余りを求めよ.
 (2) X と Y の値を求めよ.
 (3) a の値を求めよ. ただし, 素数の平方根は無理数であることを用いてよい.

5 以下の問に答えよ.

- (1) $x \geq 1$ において, $x > 2 \log x$ が成り立つことを示せ. ただし, e を自然対数の底とすると, $2.7 < e < 2.8$ であることを用いてよい.
 (2) 自然数 n に対して,

$$(2n \log n)^n < e^{2n \log n}$$

が成り立つことを示せ.

解答例

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} \quad (1) \quad & (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\
 &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\
 &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)
 \end{aligned}$$

(2) 自然数 n に対して, $w \neq 0$ のとき

$$1 - w^n = (1 - w) \sum_{k=1}^n w^{k-1} \quad \cdots (*)$$

が成立する. $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ とおくと

$$w^n = \cos 2\pi + i \sin 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad 1 - w^n = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(i) $n = 1$ のとき, $\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} = 1$ であるから, 等式

$$z \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) = z$$

が成り立つ.

(ii) $n \geq 2$ のとき, $1 - w \neq 0$ であるから, $(*)$ および $\textcircled{1}$ より

$$\sum_{k=1}^n w^{k-1} = 0$$

が成立するから

$$\begin{aligned}
 z &= \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n w^k = w \sum_{k=1}^n w^{k-1} = 0 \quad \cdots (**)
 \end{aligned}$$

$$\text{上式より} \quad z \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) = z$$

$$(3) \quad (**) \text{ より} \quad \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right) = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi k}{n} = 0$$

$$\text{よって} \quad \sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi k}{n} = 0$$

別解

$$2 \cos \frac{2\pi k}{n} \sin \frac{\pi}{n} = \sin \frac{2k+1}{n} \pi - \sin \frac{2k-1}{n} \pi$$

$$2 \sin \frac{2\pi k}{n} \sin \frac{\pi}{n} = \cos \frac{2k-1}{n} \pi - \cos \frac{2k+1}{n} \pi$$

上の2式より

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi k}{n} &= \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{2k+1}{n} \pi - \sin \frac{2k-1}{n} \pi \right) \\ &= \sin \frac{2n+1}{n} \pi - \sin \frac{\pi}{n} = 0, \end{aligned}$$

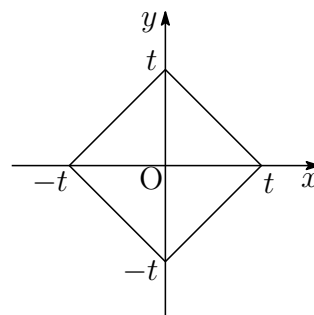
$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi k}{n} &= \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{2k-1}{n} \pi - \cos \frac{2k+1}{n} \pi \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2n+1}{n} \pi = 0 \end{aligned}$$

$$\sin \frac{\pi}{n} \neq 0 \text{ であるから } \sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi k}{n} = 0$$

■

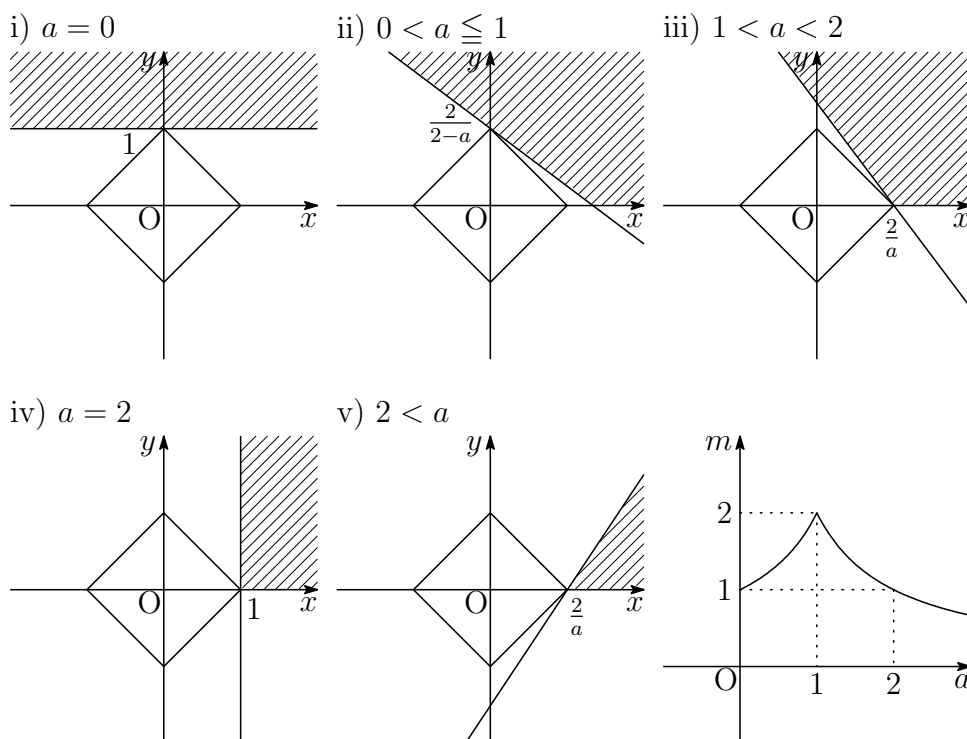
2 (1) $|x| + |y| = t \quad \cdots (*)$

$x \geq 0, y \geq 0$ のとき, $x + y = t$ であるから,
 (*) 上の点 (x, y) は2点 $(0, t), (t, 0)$ を結ぶ
 線分上にある. このとき, 点 $(x, -y), (-x, y),$
 $(-x, -y)$ は (*) を満たす. したがって, (*) は x
 軸, y 軸, 原点に関して対称であるから, (*) は
 右のような図形である.



- (2) 直線 $ax + (2 - a)y = 2$ の x 切片は $\frac{2}{a}$ ($a \neq 0$), y 切片は $\frac{2}{2 - a}$ ($a \neq 0$)
 $ax + (2 - a)y \geq 2$ ($y \geq 0$) をみたすとき, $|x| + |y|$ のとりうる値の最小値 m は, 次のようになる.

- (i) $a = 0$ のとき $y \geq 1$ よって, $(x, y) = (0, 1)$ で $m = 1$
(ii) $0 < a \leq 1$ のとき, $\frac{2}{2 - a} \leq \frac{2}{a}$ であるから
 $(x, y) = \left(0, \frac{2}{2 - a}\right)$ で $m = \frac{2}{2 - a}$
(iii) $1 < a < 2$ のとき, $\frac{2}{a} < \frac{2}{2 - a}$ であるから
 $(x, y) = \left(\frac{2}{a}, 0\right)$ で $m = \frac{2}{a}$
(iv) $a = 2$ のとき $x \geq 1$ よって, $(x, y) = (1, 0)$ で $m = 1$
(v) $2 < a$ のとき $(x, y) = \left(\frac{2}{a}, 0\right)$ で $m = \frac{2}{a}$



$$(i) \sim (v) \text{ より } m = \begin{cases} \frac{2}{2-a} & (0 \leq a < 1) \\ \frac{2}{a} & (1 \leq a) \end{cases}$$

- (3) (2) の結果のグラフは, 右上の図ようになるから,
 $a = 1$ のとき, m は最大値 **2** をとる.



$$\boxed{3} \quad (1) \quad \int_n^{n^3} \frac{dx}{x \log x} = \int_n^{n^3} \frac{(\log x)'}{\log x} dx = \left[\log(\log x) \right]_n^{n^3} \\ = \log(\log n^3) - \log(\log n) = \log \frac{\log n^3}{\log n} = \log 3$$

(2) $x \geq 2$ において, $x \log x$ は正値をとる単調増加関数であるから,

$f(x) = \frac{1}{x \log x}$ とおくと, $x \geq 2$ において, $f(x)$ は単調減少関数である.

$k < x < k+1$ において (k は 2 以上の自然数), $f(k+1) < f(x) < f(k)$ であるから

$$\int_k^{k+1} f(k+1) dx < \int_k^{k+1} f(x) dx < \int_k^{k+1} f(k) dx$$

$$\text{よって} \quad \frac{1}{(k+1) \log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \log x} < \frac{1}{k \log k}$$

(3) (1),(2) の結果から

$$\sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{(k+1) \log(k+1)} < \sum_{k=n}^{n^3-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \log x} < \sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k \log k} \\ S_n + \frac{1}{n^3 \log n^3} - \frac{1}{n \log n} < \log 3 < S_n$$

$$\text{したがって} \quad 0 < S_n - \log 3 < \frac{1}{n \log n} - \frac{1}{n^3 \log n^3}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n \log n} - \frac{1}{n^3 \log n^3} \right) = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - \log 3) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \log 3$$

■

- 4 (1) 右の割り算により

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{商} & x+5 \\ \text{余り} & -4x+6 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{r} x+5 \\ x^2-2x \overline{) x^3+3x^2-14x+6} \\ \underline{x^3-2x^2} \\ 5x^2-14x \\ \underline{5x^2-10x} \\ -4x+6 \end{array}$$

- (2) (1) の結果から

$$x^3 + 3x^2 - 14x + 6 = (x^2 - 2x)(x + 5) - 4x + 6$$

これに $x = a$ を代入すると

$$X = Y(a + 5) - 4a + 6 \quad \text{ゆえに} \quad (Y - 4)a = X - 5Y - 6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$Y - 4 \neq 0 \text{ と仮定すると} \quad a = \frac{X - 5Y - 6}{Y - 4}$$

X, Y は有理数であるから, a が無理数であることに反する.

したがって $Y = 4$ これを $\textcircled{1}$ に代入することにより $X = 26$

- (3) $Y = 4$ であるから $a^2 - 2a = 4$

$$a > 0 \text{ に注意してこれを解くと} \quad a = 1 + \sqrt{5}$$

- 5 (1) $f(x) = x - 2 \log x$ とおくと $f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$e > 2 \text{ より} \quad f(2) = 2 - 2 \log 2 = 2 \log \frac{e}{2} > 0$$

$$x \geq 1 \text{ において, } f(x) > 0, \text{ すなわち, } x > 2 \log x$$

- (2) $(2n \log n)^n < e^{2n \log n} \iff 2n \log n < e^{2 \log n} = n^2$
 $\iff 2 \log n < n$

(1) の結果から, n が自然数のとき $2 \log n < n$

よって, n が自然数のとき $(2n \log n)^n < e^{2n \log n}$