

平成 20 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分

理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
発達科学 (人間環境 (理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 実数 x, y に関する次の各命題の真偽を答えよ. さらに, 真である場合には証明し, 偽である場合は反例をあげよ.

- (1) $x > 0$ かつ $xy > 0$ ならば, $y > 0$ である.
- (2) $x \geq 0$ かつ $xy \geq 0$ ならば, $y \geq 0$ である.
- (3) $x + y \geq 0$ かつ $xy \geq 0$ ならば, $y \geq 0$ である.

2 xy 平面上に 3 点 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, \sqrt{3})$ をとる. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) A, B の 2 点を中心とする同じ半径 r の 2 つの円が接する. このような r の値を求めよ.
- (2) (1) で求めた r の値について, C を中心とする半径 r の円が, A, B の 2 点を中心とする半径 r の 2 つの円のどちらとも接することを示せ.
- (3) A, B, C の 3 点を中心とする同じ半径 s の 3 つの円が直線 l に接する. このような s の値と直線 l の方程式をすべて求めよ.

3 1 から n までの自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ の和を S とするとき, 次の問に答えよ.

- (1) n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば, S が偶数であることを示せ.
- (2) S が偶数ならば, n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ.
- (3) S が 4 の倍数ならば, n を 8 で割った余りが 0 または 7 であることを示せ.

4 xy 平面上に 5 点 $A(0, 2)$, $B(2, 2)$, $C(2, 1)$, $D(4, 1)$, $P(0, 3)$ をとる. 点 P を通り傾き a の直線 l が, 線分 BC と交わり, その交点は B, C と異なるとする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) a の値の範囲を求めよ.
- (2) 直線 l と線分 AB , 線分 BC で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1 , 直線 l と線分 BC , 線分 CD で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_2 とするとき, それらの和 $V = V_1 + V_2$ を a の式で表せ.
- (3) (1) で求めた a の値の範囲で, (2) で求めた V は, $a = -\frac{3}{4}$ で最小値をとることを示せ.

5 n, k を自然数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $(1+x)^n$ の展開式を用いて，次の等式を示せ．

$$\begin{aligned} 2^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n \\ 0 &= {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n \end{aligned}$$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$ を求めよ．

(3) 2 次の正方行列 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ は，それぞれが $\frac{1}{3}$ の確率で，

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のいずれかになるとする． n 個の行列の積 $M_1 M_2 M_3 \cdots M_n$ が $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と等しくなる確率を求めよ．

解答例

1 (1) $x > 0$ より, $\frac{1}{x} > 0$ を $xy > 0$ の辺々に掛けると $y > 0$ よって 真

(2) 偽 反例: $x = 0, y = -1$

(3) $y < 0$ と仮定し, これを $x + y \geq 0$ の辺々に掛けると $xy + y^2 \leq 0 \cdots (*)$
 仮定より, $y^2 > 0$, 条件より, $xy \geq 0$ であるから $xy + y^2 > 0$
 これは, $(*)$ に反し, 矛盾を生じる. よって 真 ■

2 (1) $A(1, 0), B(-1, 0)$ より $AB = 2$ このとき $r + r = 2$ よって $r = 1$

(2) $A(1, 0), B(-1, 0), C(0, \sqrt{3})$ より $AB = BC = CA = 2$
 よって, C を中心とする半径 $r = 1$ の円が, A, B の 2 点を中心とする半径 $r = 1$ の 2 つの円に接する.

(3) 直線 l の方程式を $px + qy + k = 0$ ($p^2 + q^2 = 1, q \geq 0$) とおく. 3 点 $A(1, 0), B(-1, 0), C(0, \sqrt{3})$ から直線 l までの距離がすべて s であるから

$$|p + k| = |-p + k| = |\sqrt{3}q + k| = s$$

$$p^2 + 2pk + k^2 = p^2 - 2pk + k^2 = 3q^2 + 2\sqrt{3}qk + k^2 = s^2 \cdots (*)$$

$(*)$ の第 1 式と第 2 式を整理すると $pk = 0$

(i) $p = 0$ のとき, p, q の条件から $q = 1$ これらを $(*)$ に代入すると

$$k^2 = 3 + 2\sqrt{3}k + k^2 = s^2 \quad \text{ゆえに} \quad k = -\frac{\sqrt{3}}{2}, s = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{このとき, } l \text{ の方程式は } y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

(ii) $k = 0$ のとき, これを $(*)$ に代入すると

$$p^2 = 3q^2 = s^2 \quad \text{ゆえに} \quad p^2 = s^2, q^2 = \frac{s^2}{3}$$

$$\text{これらを } p^2 + q^2 = 1 \text{ に代入することにより } s = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{したがって } p = \pm s = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, q = \frac{s}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{このとき, } l \text{ の方程式は } \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \quad \text{すなわち} \quad \pm \sqrt{3}x + y = 0$$

$$(i), (ii) \text{ より } s = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad l \text{ は } y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \pm \sqrt{3}x + y = 0 \quad \blacksquare$$

3 (1) $S = 1 + 2 + 3 \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \cdots (*)$

n を 4 で割った余りが 0 のとき, $\frac{n}{4}$ は整数であるから

$$S = 2 \times \frac{n}{4}(n+1) \quad \text{ゆえに } S \text{ は偶数}$$

n を 4 で割った余りが 3 のとき, $\frac{n+1}{4}$ は整数であるから

$$S = 2 \times n \cdot \frac{n+1}{4} \quad \text{ゆえに } S \text{ は偶数}$$

(2) n と $n+1$ は偶奇が異なるから, S が偶数ならば, $(*)$ より, n または $n+1$ が 4 の倍数, すなわち, n を 4 で割った余りが 0 または 3 である.

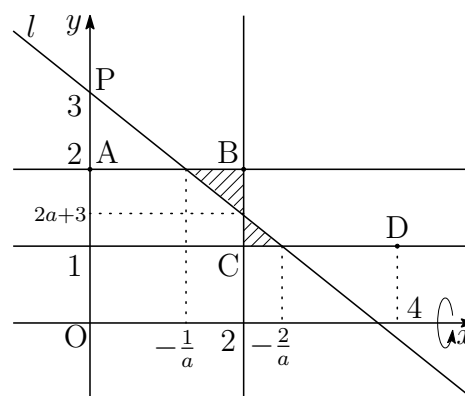
(3) (2) と同様に, S が 4 の倍数ならば, $(*)$ より, n または $n+1$ が 8 の倍数, すなわち, n を 8 で割った余りが 0 または 7 である. ■

4 (1) $l: y = ax + 3$ が線分 BC と交わる時
(2 点 B, C と異なる)

$x = 2$ のとき, $1 < y < 2$ であるから

$$1 < 2a + 3 < 2$$

よって $-1 < a < -\frac{1}{2}$



(2) 直線 l と 2 直線 $y = 2$, $y = 1$ との共有点の x 座標は, 2 つの方程式

$$ax + 3 = 2, \quad ax + 3 = 1$$

をそれぞれ解いて $x = -\frac{1}{a}, \quad x = -\frac{2}{a}$

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\pi} &= \int_{-\frac{1}{a}}^2 \{2^2 - (ax + 3)^2\} dx = - \int_{-\frac{1}{a}}^2 (ax + 1)(ax + 5) dx \\ &= - \int_{-\frac{1}{a}}^2 \{(ax + 1)^2 + 4(ax + 1)\} dx \\ &= - \left[\frac{1}{3a}(ax + 1)^3 + \frac{2}{a}(ax + 1)^2 \right]_{-\frac{1}{a}}^2 \\ &= -\frac{1}{3a}(2a + 1)^3 - \frac{2}{a}(2a + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{V_2}{\pi} &= \int_2^{-\frac{2}{a}} \{(ax+3)^2 - 1^2\} dx = \int_2^{-\frac{2}{a}} (ax+4)(ax+2) dx \\
&= \int_2^{-\frac{2}{a}} \{(ax+2)^2 + 2(ax+2)\} dx \\
&= \left[\frac{1}{3a}(ax+2)^3 + \frac{1}{a}(ax+2)^2 \right]_2^{-\frac{2}{a}} \\
&= -\frac{1}{3a}(2a+2)^3 - \frac{1}{a}(2a+2)^2
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \frac{V_1}{\pi} + \frac{V_2}{\pi} \\
&= -\frac{1}{3a}\{(2a+1)^3 + (2a+2)^3\} - \frac{1}{a}\{2(2a+1)^2 + (2a+2)^2\} \\
&= -\frac{1}{3a}\{(2a+1)^3 + (2a+2)^3 + 6(2a+1)^2 + 3(2a+2)^2\} \\
&= -\frac{1}{3a}(16a^3 + 72a^2 + 78a + 27)
\end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad V = -\frac{\pi}{3} \left(16a^2 + 72a + 78 + \frac{27}{a} \right)$$

(3) (1)の結果から

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{da} &= -\frac{\pi}{3} \left(32a + 72 - \frac{27}{a^2} \right) \\
&= -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{32a^3 + 72a^2 - 27}{a^2} \\
&= -\frac{\pi(4a+3)(8a^2 + 12a - 9)}{3a^2}
\end{aligned}$$

ここで, $8a^2 + 12a - 9 = 8\left(a + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{27}{2}$ より, $-1 < a < -\frac{1}{2}$ において

$$-\frac{27}{2} \leq 8a^2 + 12a - 9 < -13$$

a	(-1)	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$	$(-\frac{1}{2})$
$\frac{dV}{da}$		$-$	0	$+$	
V		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって, V は $a = -\frac{3}{4}$ で最小となる. ■

5 (1) 2項定理より

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + {}_nC_3x^3 + \cdots + {}_nC_nx^n \quad \cdots (*)$$

(*) に $x = 1$ を代入すると

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n$$

(*) に $x = -1$ を代入すると

$$0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$k \text{ が奇数のとき} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k \text{ が偶数のとき} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) (1) の結果の辺々を加えて、両辺を 2 で割ると

$$2^{n-1} = {}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots + \frac{1 + (-1)^n}{2} {}_nC_n \quad \cdots (**)$$

零行列が 1 つでも含まれると全体の積が零行列になってしまうため、

$$M_1, M_2, \cdots, M_n$$

はすべて E または F でなければならない。

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと, $M_1, M_2, M_3, \cdots, M_n$ の n 個の行列は E と F からなり, F の個数が偶数個であるから, 求める確率は

$$\begin{aligned} & {}_nC_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_nC_2 \left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_nC_4 \left(\frac{1}{3}\right)^n + \cdots + \frac{1 + (-1)^n}{2} {}_nC_n \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left({}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots + \frac{1 + (-1)^n}{2} {}_nC_n \right) \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{2^{n-1}}{3^n} \end{aligned}$$

■