

平成 18 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分

理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
発達科学 (人間環境 (理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

- 1 平面上に原点 O から出る、相異なる 2 本の半直線 OX , OY をとり、 $\angle XOY < 180^\circ$ とする. 半直線 OX 上に O と異なる点 A を、半直線 OY 上に O と異なる点 B をとり、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく. 次の問に答えよ.

- (1) 点 C が $\angle XOY$ の二等分線上にあるとき、ベクトル $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ は実数 t を用いて

$$\vec{c} = t \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

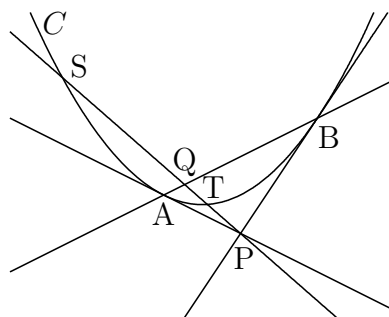
と表されることを示せ.

- (2) $\angle XOY$ の二等分線と $\angle XAB$ の二等分線の交点を P とおくと、 $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ および 3 辺の長さ $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{b} - \vec{a}|$ を用いて表せ.

- 2 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ と、実数 x, y, z, w を成分とする行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ を考える. 次の問に答えよ.

- (1) X について関係式 $XA = AX$ が成立するための、 x, y, z, w の条件を求めよ.
- (2) X が $X^2 = A$ を満たすとき、 $XA = AX$ が成立することを示せ.
- (3) $X^2 = A$ を満たす行列 X をすべて求めよ.

- 3 xy 平面において放物線 $C: y = x^2$ と、下側にある点 $P(p, q)$ ($q < p^2$) を考える. P を通るような C の 2 つの接線を考え、その接点をそれぞれ A, B とする. また、 P を通る傾き m の直線が C と相異なる 2 点 S, T で交わるとする.



点 A, B の x 座標をそれぞれ a, b とし、点 S, T の x 座標をそれぞれ s, t とする. 次の問に答えよ,

- (1) $a + b, ab$ を p, q で表せ.
- (2) $s + t, st$ を p, q, m で表せ.
- (3) 直線 AB と直線 ST の交点を Q とし、 Q の x 座標を u とする. 上図のように $s < u < t < p$ となる場合について、等式

$$\frac{1}{PS} + \frac{1}{PT} = \frac{2}{PQ}$$

が成立することを示せ.

- 4 xyz 空間に 3 点 $P(1, 1, 0), Q(-1, 1, 0), R(-1, 1, 2)$ をとる. 次の問に答えよ.

- (1) t を $0 < t < 2$ を満たす実数とするとき、平面 $z = t$ と、 $\triangle PQR$ の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ.
- (2) $\triangle PQR$ を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ.

- 5 $\alpha = \frac{3 + \sqrt{7}i}{2}$ とする. ただし、 i は虚数単位である. 次の問に答えよ.

- (1) α を解にもつような 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ (p, q は実数) を求めよ.
- (2) 整数 a, b, c を係数とする 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ について、解の 1 つは α であり、また $0 \leq x \leq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする. このような整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.

解答例

- 1 (1) $\overrightarrow{OA'} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\overrightarrow{OB'} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$ とおくと, 四角形 $OA'C'B$ はひし形で, OC' は $\angle A'OB'$ の二等分線である. よって, 実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OC'} = t \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

- (2) 点 P は $\angle XOY$ の二等分線上の点であるから,
(1) の結果を用いて

$$\overrightarrow{OP} = t \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) = \frac{t}{|\vec{a}|} \vec{a} + \frac{t}{|\vec{b}|} \vec{b}$$

点 P は $\angle XAB$ の二等分線上の点であるから,
実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + s \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{|\vec{b} - \vec{a}|} \right) = \left\{ 1 + \left(\frac{1}{|\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{b} - \vec{a}|} \right) s \right\} \vec{a} + \frac{s}{|\vec{b} - \vec{a}|} \vec{b}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は 1 次独立であるから

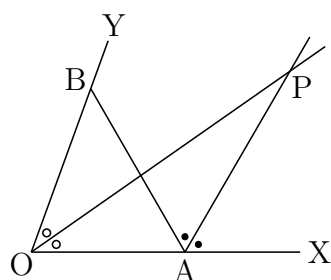
$$\frac{t}{|\vec{a}|} = 1 + \left(\frac{1}{|\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{b} - \vec{a}|} \right) s, \quad \frac{t}{|\vec{b}|} = \frac{s}{|\vec{b} - \vec{a}|}$$

上の第 2 式から, $s = \frac{|\vec{b} - \vec{a}|}{|\vec{b}|} t$. これを第 1 式に代入すると

$$\frac{t}{|\vec{a}|} = 1 + \left(\frac{1}{|\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{b} - \vec{a}|} \right) \frac{|\vec{b} - \vec{a}|}{|\vec{b}|} t$$

$$\text{したがって} \quad \left(\frac{1}{|\vec{a}|} + \frac{1}{|\vec{b}|} - \frac{|\vec{b} - \vec{a}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right) t = 1 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{b} - \vec{a}|}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{b} - \vec{a}|} \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) = \frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{b} - \vec{a}|} \quad \blacksquare$$



- 2** (1) $XA = AX$ より, $X(2A) = 2AX$ であるから

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - \sqrt{3}z & y - \sqrt{3}w \\ \sqrt{3}x + z & \sqrt{3}y + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \sqrt{3}y & -\sqrt{3}x + y \\ z + \sqrt{3}w & -\sqrt{3}z + w \end{pmatrix}$$

上の (1, 1), (2, 2) 成分を比較して $y = -z$

上の (1, 2), (2, 1) 成分を比較して $w = x$

よって $\mathbf{y} = -\mathbf{z}, \mathbf{w} = \mathbf{x}$

- (2) $A = X^2$ であるとき $XA = XX^2 = X^2X = AX$

- (3) (1), (2) の結論から $X^2 = A \implies XA = AX \implies y = -z, w = x$

$X = \begin{pmatrix} x & -z \\ z & x \end{pmatrix}$ とおけるから, $X^2 = A$ より

$$\begin{pmatrix} x^2 - z^2 & -2xz \\ 2xz & x^2 - z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

したがって $x^2 - z^2 = \frac{1}{2}, 2xz = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots (*)$

上の 2 式から z を消去すると $x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4x}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$$16x^4 - 8x^2 - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (4x^2 + 1)(4x^2 - 3) = 0$$

ゆえに $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ これを (*) に代入して $z = \pm \frac{1}{2}$ (複号同順)

よって $\mathbf{X} = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

■

3 (1) $C: y = x^2$ より $y' = 2x$

C 上の点 $A(a, a^2)$ における接線の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2$$

同様に, C 上の点 $B(b, b^2)$ における接線の方程式は $y = 2bx - b^2$

これらの2直線の交点は $\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$

したがって $p = \frac{a+b}{2}, q = ab$ よって $a + b = 2p, ab = q$

別解 C 上の点 (t, t^2) の点における接線 $y = 2tx - t^2$ が点 (p, q) を通るとき

$$q = 2tp - t^2 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 2pt + q = 0$$

2解 a, b と係数の関係により $a + b = 2p, ab = q$

(2) 点 $P(p, q)$ を通り, 傾き m の直線は $y = mx - mp + q \cdots \textcircled{1}$

この直線と $C: y = x^2$ の方程式から y を消去すると

$$x^2 - mx + mp - q = 0$$

2解 s, t と係数の関係により $s + t = m, st = mp - q$

(3) 2点 $A(a, a^2), B(b, b^2)$ を通る直線の方程式は, (1) の結果から

$$y = (a+b)x - ab \quad \text{すなわち} \quad y = 2px - q \cdots \textcircled{2}$$

2直線 AB, ST の交点 Q の x 座標 u は, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より

$$2pu - q = mu - mp + q \quad \text{ゆえに} \quad u = \frac{2q - mp}{2p - m}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) の結果より} \quad \frac{1}{p-s} + \frac{1}{p-t} &= \frac{2p - (s+t)}{p^2 - (s+t)p + st} \\ &= \frac{2p - m}{p^2 - mp + (mp - q)} = \frac{2p - m}{p^2 - q} \end{aligned}$$

$$\text{また} \quad p - u = p - \frac{2q - mp}{2p - m} = \frac{2(p^2 - q)}{2p - m} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{p - u} = \frac{2p - m}{p^2 - q}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{1}{p-s} + \frac{1}{p-t} = \frac{2}{p-u}$$

4点 P, S, Q, T はすべて傾き m の同一直線上にあるから

$$\frac{PS}{p-s} = \frac{PT}{p-t} = \frac{PQ}{p-u} \quad \text{よって} \quad \frac{1}{PS} + \frac{1}{PT} = \frac{2}{PQ}$$

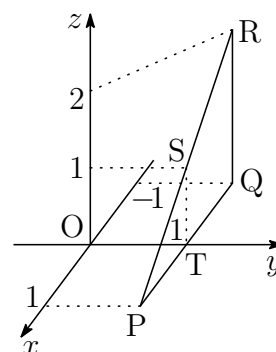


- 4 (1) 直線 QR と平面 $z = t$ の交点は $(-1, 1, t)$
 平面 $y = 1$ 上の直線 PR の方程式は

$$y = 1, \quad x + z = 1$$

これに $z = t$ を代入すると $x = 1 - t$
 よって、求める 2 つの端点の座標は

$$(-1, 1, t), \quad (1 - t, 1, t)$$



- (2) $S(0, 1, 1)$, $T(0, 1, 0)$ とし, $\triangle PQR$ と平面 $z = t$ との断面で z 軸からの距離を d とする.

- (i) $0 < t \leq 1$ のとき, d は点 $(-1, 1, t)$ で最大値 $\sqrt{2}$ をとり, 点 $(0, 1, t)$ で最小値 1 をとる.
 (ii) $1 \leq t < 2$ のとき, d は点 $(-1, 1, t)$ で最大値 $\sqrt{2}$ をとり, 点 $(1 - t, 1, t)$ で最小値 $\sqrt{(1 - t)^2 + 1^2} = \sqrt{t^2 - 2t + 2}$ をとる.

(i), (ii) より, 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^1 \{(\sqrt{2})^2 - 1^2\} dt + \int_1^2 \{(\sqrt{2})^2 - (t^2 - 2t + 2)\} dt \\ &= \left[t \right]_0^1 + \left[t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_1^2 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

よって $V = \frac{5}{3}\pi$

補足 最後の定積分の計算は, 次のように計算することもできる.

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^1 \{(\sqrt{2})^2 - 1^2\} dt + \int_1^2 \{(\sqrt{2})^2 - 1 - (t - 1)^2\} dt \\ &= \int_0^2 dt - \int_1^2 (t - 1)^2 dt \\ &= 2 - \frac{1}{3} \left[(t - 1)^3 \right]_1^2 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$



- 5** (1) α は 2 次方程式 $(*) x^2 + px + q = 0$ の解であるから $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$
両辺の共役複素数をとると, p, q は実数であることに注意して

$$\overline{\alpha^2 + p\alpha + q} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\overline{\alpha})^2 + p\overline{\alpha} + q = 0$$

$\alpha, \overline{\alpha}$ は 2 次方程式 $(*)$ の解であるから, 解と係数の関係により

$$\frac{3 + \sqrt{7}i}{2} + \frac{3 - \sqrt{7}i}{2} = -p, \quad \frac{3 + \sqrt{7}i}{2} \times \frac{3 - \sqrt{7}i}{2} = q$$

ゆえに $p = -3, q = 4$ よって $x^2 - 3x + 4 = 0$

- (2) 実係数の 3 次方程式 $(**) x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が α を解にもつから

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

両辺の共役複素数をとると

$$\overline{\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\overline{\alpha})^3 + a(\overline{\alpha})^2 + b\overline{\alpha} + c = 0$$

$\alpha, \overline{\alpha}$ は 3 次方程式 $(**)$ の解であるから, (1) の結果から

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(x + \frac{c}{4}\right)(x^2 - 3x + 4) \\ &= x^3 + \left(\frac{c}{4} - 3\right)x^2 + \left(4 - \frac{3}{4}c\right)x + c \end{aligned}$$

3 次方程式 $(**)$ の実数解 $x = -\frac{c}{4}$ が $0 \leq x \leq 1$ にあり, 係数 $a = \frac{c}{4} - 3$,
 $b = 4 - \frac{3}{4}c$ が整数であるから, これらを満たす整数 c は

$$c = 0 \text{ のとき } a = -3, b = 4$$

$$c = -4 \text{ のとき } a = -4, b = 7$$

よって $(a, b, c) = (-3, 4, 0), (-4, 7, -4)$ ■