

平成 17 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分
理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
発達科学 (人間環境 (理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

- 1 O を原点とする空間の 3 点 $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 0)$, $C(0, 0, 1)$ がある。

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2} \right) \overrightarrow{OA}$$

を満たす点を D とする。ただし、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を表す。次の問に答えよ。

- (1) D の座標を求めよ。
- (2) 2 つの実数 s と t に対して、 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ を満たす点を P とする。 t を固定して考えたとき、 $|\overrightarrow{CP}|^2$ を最小にする s を t を用いて表せ。
- (3) $|\overrightarrow{CP}|^2$ を最小にする s と t の値を求めよ。
- (4) (3) で求めた s と t の値をそれぞれ s_0 と t_0 とする。 s_0 と t_0 に対し、 P_0 を $\overrightarrow{OP}_0 = s_0\overrightarrow{OA} + t_0\overrightarrow{OB}$ を満たす点とする。

$$\overrightarrow{OP}_0 = \left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}|^2} \right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OD}|^2} \right) \overrightarrow{OD}$$

となることを示せ。

- 2 a を正の実数とする。 xy 平面の放物線 $C: y = x^2$ に点 $A(-a, a^2)$ をとる。 $s > 0$ のとき、 x 軸上の点 $P(s, 0)$ に対して、直線 AP と C の 2 つの交点のうち、A とは異なる交点を $Q(t, t^2)$ とする。 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点を $P'(t, 0)$ とする。いま、 x 軸上の点 $P_1(c, 0)$ ($c > 0$) から出発して、点 P に対して点 Q, P' を定めたのと同じ方法で P_1 から点 Q_1, P_2 を定め、同様に P_2 から点 Q_2, P_3 を定め、この方法を繰り返して、 $P_1, P_2, P_3, \dots$ と $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ を定める。次の問に答えよ。

- (1) t を a と s を用いて表せ。
- (2) 点 P_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) の x 座標を x_n とする。数列 $\{u_n\}$ を $u_n = \frac{1}{x_n}$ で定める。 $\{u_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 直角三角形 $P_n Q_n P_{n+1}$ の面積を S_n で表す。自然数 r を選んで、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r S_n$ が正の実数値に収束するようにできる。このような r の値とそのときの極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r S_n$ を求めよ。

- 3 a を実数とし, $a > 1$ とする. 点 $P(1, a)$ を通り, 円 $C: x^2 + y^2 = 1$ と接する 2 本の直線のうち, $x = 1$ とは異なる直線を ℓ とする. ℓ と x 軸の交点を Q とする. 次の問に答えよ.

- (1) $A(1, 0)$ とする. 線分 QA の長さ L を a を用いて表せ.
- (2) 三角形 PQA の面積を S とする. a が $a > 1$ の範囲を動くとき, S の最小値とそのときの a の値を求めよ.

- 4 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \text{ または } x > 2 \text{ のとき} \\ |x - 1| & 0 \leq x \leq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める. 次の問に答えよ.

- (1) $g(x) = f(f(x))$ とおく. 関数 $y = g(x)$ のグラフをかけ.
 - (2) n を自然数とする. $\int_0^{n^2} g\left(\frac{x - n^2 + n}{n}\right) \cos \frac{\pi x}{n} dx$ を求めよ.
- 5 A, B, C, D 4 つの袋の中にそれぞれ 6 枚のカードが入っている. それぞれのカードには 1 から 9 までの数字の 1 つが書かれている. A, B, C, D の袋の中のカードは次の 4 つの条件を満たしているとする.
- (i) 袋の中からカードを無作為に 1 枚抜いたとき, カードに書かれている数字の期待値は, A, B, C, D すべて同じである.
 - (ii) $p(A, B) = p(B, C) = p(C, D) = p(D, A) = \frac{2}{3}$ である.
ここで, $p(X, Y)$ は袋 X と袋 Y からそれぞれ 1 枚ずつカードを無作為に抜いたとき, X から抜いたカードに書かれている数字が Y から抜いたカードに書かれている数字より大きい確率を表す.
 - (iii) A, B, C の袋の中のカードに書かれている数字はそれぞれ 2 種類で, D の袋の中のカードにはすべて同じ数字が書かれている.
 - (iv) A の袋の中のカードに書かれている数字の種類は 3 と 9 である.

次の問に答えよ.

- (1) A の袋の中の 3 の書かれているカードの枚数と, D の袋の中のカードに書かれた数字を求めよ.
- (2) B の袋の中のカードに書かれている 2 種類の数字と, そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ.
- (3) C の袋の中のカードに書かれている 2 種類の数字と, そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ.

解答例

1 (1) $\vec{OA} = (1, 1, 1)$, $\vec{OB} = (1, 2, 0)$ より $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 3$, $|\vec{OA}|^2 = 3$

$$\vec{OD} = \vec{OB} - \left(\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}|^2} \right) \vec{OA} = (1, 2, 0) - \frac{3}{3}(1, 1, 1) = (0, 1, -1)$$

よって $\mathbf{D}(0, 1, -1)$

(2) $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ より

$$\begin{aligned} |\vec{CP}|^2 &= |\vec{OP} - \vec{OC}|^2 = |s\vec{OA} + t\vec{OB} - \vec{OC}|^2 \\ &= s^2|\vec{OA}|^2 + 2s\{\vec{OA} \cdot (t\vec{OB} - \vec{OC})\} + |t\vec{OB} - \vec{OC}|^2 \end{aligned} \quad (*)$$

固定された t に対して, $|\vec{CP}|^2$ を最小にする s は

$$s = -\frac{2\vec{OA} \cdot (t\vec{OB} - \vec{OC})}{2|\vec{OA}|^2} = -\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}|^2}t + \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OA}|^2} = -t + \frac{1}{3}$$

(3) (*) より $|\vec{CP}|^2 = t^2|\vec{OB}|^2 + 2t\{\vec{OB} \cdot (s\vec{OA} - \vec{OC})\} + |s\vec{OA} - \vec{OC}|^2$

固定された s に対して, $|\vec{CP}|^2$ を最小にする t は

$$t = -\frac{2\vec{OB} \cdot (s\vec{OA} - \vec{OC})}{2|\vec{OB}|^2} = -\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OB}|^2}s + \frac{\vec{OB} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OB}|^2} = -\frac{3}{5}s$$

これと (2) の結果を連立すると $s = \frac{5}{6}$, $t = -\frac{1}{2}$

別解 $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{n} = (-2, 1, 1)$ とすると

$$(**) \quad \vec{OP} = \vec{OC} - \frac{\vec{OC} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = (0, 0, 1) - \frac{1}{6}(-2, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

$s\vec{OA} + t\vec{OB} = \vec{OP}$ であるから

$$s(1, 1, 1) + t(1, 2, 0) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{5}{6}, \quad t = -\frac{1}{2}$$

(4) $\vec{OD} \perp \vec{OA}$, $\vec{OA} \perp \vec{n}$, $\vec{OD} \perp \vec{n}$ であるから

$$\vec{OC} = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OA}|^2} \vec{OA} + \frac{\vec{OD} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OD}|^2} \vec{OD} + \frac{\vec{OC} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

上式および (**) から

$$\vec{OP}_0 = \left(\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OA}|^2} \right) \vec{OA} + \left(\frac{\vec{OD} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OD}|^2} \right) \vec{OD}$$

■

- 2** (1) 直線 AQ の方程式は ($t \neq -a$)

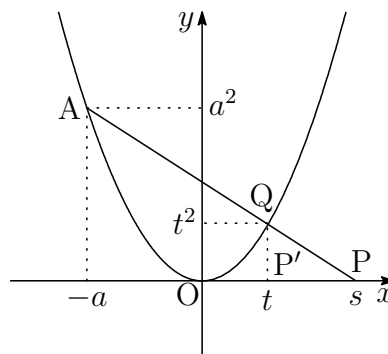
$$y - a^2 = \frac{t^2 - a^2}{t + a}(x + a)$$

すなわち $y = (t - a)x + at$

これが点 P($s, 0$) を通るから

$$0 = (t - a)s + at$$

よって $t = \frac{as}{a + s}$



- (2) (1) の結果を利用して

$$x_{n+1} = \frac{ax_n}{a + x_n} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{a}$$

$$x_1 = c, \quad u_n = \frac{1}{x_n} \quad \text{であるから} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{a}$$

$\{u_n\}$ は, 初項 $\frac{1}{c}$, 公差 $\frac{1}{a}$ の等差数列であるから

$$u_n = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}(n - 1)$$

- (3) $P_n(x_n, 0)$, $Q_n(x_{n+1}, x_{n+1}^2)$, $P_{n+1}(x_{n+1}, 0)$ より ($x_{n+1} < x_n$)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} P_n P_{n+1} \cdot P_{n+1} Q_n = \frac{1}{2} (x_n - x_{n+1}) x_{n+1}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) x_n x_{n+1}^3 = \frac{1}{2a} x_n x_{n+1}^3 = \frac{1}{2a} \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} \cdot x_{n+1}^4 \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n} \left(\frac{1}{u_{n+1}} \right)^4 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{cn} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a} \quad \text{より, } r = 4 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^r S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n} \left(\frac{n}{u_{n+1}} \right)^4 = \frac{1}{2a} \cdot 1 \cdot a^4 = \frac{a^3}{2} \end{aligned}$$

■

- 3** (1) ℓ と C の接点を T , ℓ の偏角を θ とすると

$$\tan \theta = \frac{AP}{QA} = \frac{a}{L},$$

$$\sin \theta = \frac{OT}{OQ} = \frac{1}{L-1}$$

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \text{ であるから}$$

$$1 + \left(\frac{L}{a}\right)^2 = (L-1)^2$$

$$\text{ゆえに } L\{(a^2-1)L-2a^2\}=0 \quad a>1, L \neq 0 \text{ より } L = \frac{2a^2}{a^2-1}$$

$$(2) (1) \text{ の結果から } S = \frac{1}{2}La = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2}{a^2-1} \cdot a = \frac{a^3}{a^2-1} = \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a^3}}$$

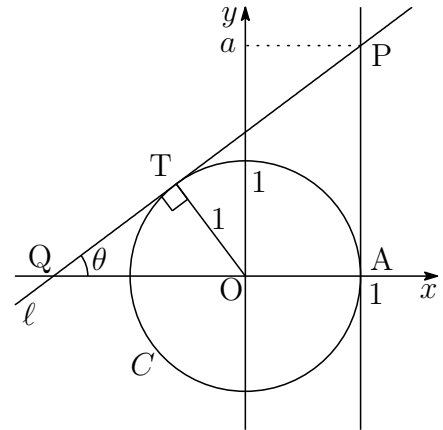
$$a>1 \text{ より, } t = \frac{1}{a} \text{ とおくと } S = \frac{1}{t-t^3} \quad (0 < t < 1)$$

$$f(t) = t - t^3 \quad (0 < t < 1) \text{ とすると } f'(t) = 1 - 3t^2$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$$f(t) \text{ は極大値 } f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ をとる.}$$

$$\text{よって, } S \text{ は } a = \sqrt{3} \text{ のとき, 最小値 } \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ をとる.}$$



4 (1) $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \text{ または } x > 2 \text{ のとき} \\ |x-1| & 0 \leq x \leq 2 \text{ のとき} \end{cases}$

(i) $x < 0, 2 < x$ のとき $f(x) = 1$ ゆえに $f(f(x)) = 0$

(ii) $0 \leq x \leq 1$ のとき $f(x) = 1 - x$ より, $0 \leq f(x) \leq 1$ であるから

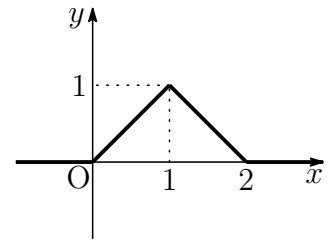
$$f(f(x)) = 1 - f(x) = 1 - (1 - x) = x$$

(iii) $1 \leq x \leq 2$ のとき $f(x) = x - 1$ より, $0 \leq f(x) \leq 1$ であるから

$$f(f(x)) = 1 - f(x) = 1 - (x - 1) = 2 - x$$

(i)~(iii) より, $g(x) = f(f(x))$ は

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ または } x > 2 \text{ のとき} \\ x & 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき} \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$



よって, $y = g(x)$ のグラフは右の図のようになる.

(2) (1) の結果から, 自然数 n について

$$g\left(\frac{x - n^2 + n}{n}\right) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq n^2 - n) \\ \frac{x - n^2 + n}{n} & (n^2 - n \leq x \leq n^2) \end{cases}$$

したがって, $I = \int_0^{n^2} g\left(\frac{x - n^2 + n}{n}\right) \cos \frac{\pi x}{n} dx$ とすると

$$\begin{aligned} I &= \int_{n^2-n}^{n^2} \frac{x - n^2 + n}{n} \cos \frac{\pi x}{n} dx \\ &= \int_0^n \frac{x}{n} \cos \frac{\pi(x + n^2 - n)}{n} dx \\ &= (-1)^{n-1} \int_0^n \frac{x}{n} \cos \frac{\pi x}{n} dx \\ &= (-1)^{n-1} \left[\frac{x}{\pi} \sin \frac{\pi x}{n} + \frac{n}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{n} \right]_0^n \\ &= (-1)^{n-1} \left(-\frac{2n}{\pi^2} \right) = \frac{2(-1)^n n}{\pi^2} \end{aligned}$$

■

- 5 (1) A の袋の中のカード 3 の枚数を a とすると, A の袋の中のカード 9 の枚数は $6 - a$ である. $p(D, A) = \frac{2}{3}$ より, A の袋からカード 3 を取り出す確率が $\frac{2}{3}$ であるから

$$\frac{a}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{ゆえに} \quad a = 4$$

A の袋から 1 枚カードを引いたとき, カードに書かれた数字の期待値は

$$3 \cdot \frac{4}{6} + 9 \cdot \frac{2}{6} = 5$$

これと D の袋から 1 枚引いたとき, カードに書かれた数字の期待値がこれと等しいから, D に書かれた数字は

5

- (2) B の袋の中のカードの数を b_1, b_2 とし ($b_1 < b_2$), それぞれの枚数を x_1, x_2 とすると ($x_1 + x_2 = 6$), 書かれたカードの数の期待値が 5 であるから

$$\frac{b_1 x_1 + b_2 x_2}{6} = 5 \quad \text{ゆえに} \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 = 30 \quad (*)$$

$6b_1 = b_1(x_1 + x_2) < b_1 x_1 + b_2 x_2 < b_2(x_1 + x_2) = 6b_2$ であるから

$$6b_1 < 30 < 6b_2 \quad \text{ゆえに} \quad b_1 < 5 < b_2$$

(i) $3 \leq b_1 < 5$ のとき

$$p(A, B) = \frac{4}{6} \cdot 0 + \frac{2}{6} \cdot 1 < \frac{2}{3}$$

となり, 不適.

(ii) $b_1 \leq 2, b_2 = 9$ のとき

$$p(A, B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{x_1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{x_1}{6} = \frac{x_1}{6} = \frac{2}{3}$$

これを解いて $x_1 = 4$ ゆえに $x_2 = 2$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 \leq 2 \cdot 4 + 9 \cdot 2 = 26$$

これは (*) に反し, 不適.

(iii) $b_1 \leq 2, 5 < b_2 \leq 8$ のとき

$$p(A, B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{x_1}{6} + \frac{2}{6} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

これを解いて $x_1 = 3$ ゆえに $x_2 = 3$

$$3b_1 + 3b_2 = 30 \quad \text{ゆえに} \quad b_1 + b_2 = 10$$

b_1, b_2 の範囲に注意すると $b_1 = 2, b_2 = 8$

よって、カードに書かれた数は **2, 8** で、その枚数はともに **3** 枚.

(3) C の袋の中のカードの数を c_1, c_2 とし ($c_1 < c_2$), それぞれの枚数を y_1, y_2 とすると ($y_1 + y_2 = 6$), 書かれたカードの数の期待値が 5 であるから

$$\frac{c_1 y_1 + c_2 y_2}{6} = 5 \quad \text{ゆえに} \quad c_1 y_1 + c_2 y_2 = 30 \quad (**)$$

(2) と同様に $c_1 < 5 < c_2$ $p(C, D) = \frac{2}{3}$ より

$$\frac{y_1}{6} \cdot 0 + \frac{y_2}{6} = \frac{2}{3}$$

ゆえに $y_2 = 4$ ゆえに $y_1 = 2$

これらを (**) に代入すると

$$2c_1 + 4c_2 = 30 \quad \text{ゆえに} \quad c_1 + 2c_2 = 15$$

c_1, c_2 の範囲に注意して $(c_1, c_2) = (1, 7), (3, 6)$

• $(c_1, c_2) = (1, 7)$ のとき, 以下のとおり適する.

$$p(B, C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

• $(c_1, c_2) = (3, 6)$ のとき, 以下のとおり適さない.

$$p(B, C) = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{3}$$

よって, C のカードの数字は **1** と **7** で, それぞれの枚数は **2** 枚, **4** 枚 ■