

## 平成13年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)120分

理・工・医(医・保健(検査技術科学))・農・  
発達科学(人間環境(理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 行列  $A, B$  を

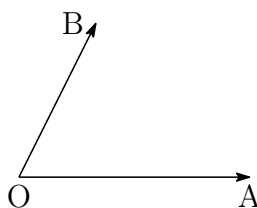
$$A = \begin{pmatrix} k & 4 \\ -1 & k-4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

とする。次の問に答えよ。

- (1)  $A$  の逆行列が存在しないような  $k$  の値を求めよ。
- (2)  $A$  の逆行列が存在するとき、 $AX = B$  となる  $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  を  $a, b, k$  を用いて表せ。
- (3)  $A$  の逆行列が存在しないとき、 $AX = B$  をみたす行列  $X$  があるような  $a, b$  の値を求めよ。

2 3点  $O, A, B$  は、一直線上にない点とし、 $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$  とする。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とおく。このとき次の問に答えよ。

- (1) 点  $P$  を  $\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BC}$  ( $t$  は実数) をみたす点とする。このとき、 $\overrightarrow{OP}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, t$  であらわせ。
- (2) 点  $Q$  を  $\overrightarrow{OQ} = 2s\overrightarrow{OA}$  ( $s$  は実数) をみたす点とする。  $P$  と  $Q$  の中点を  $M$  とする。  $t, s$  が  $0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1$  をみたしながら変化するとき、点  $M$  の存在する範囲を図示せよ。



3 次の問に答えよ。

- (1)  $a, b, c$  を整数とする。  $x$  に関する3次方程式  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  が有理数の解をもつならば、その解は整数であることを示せ。ただし、正の有理数は1以外の公約数をもたない2つの自然数  $m, n$  を用いて  $\frac{n}{m}$  と表せることを用いよ。
- (2) 方程式  $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$  は、有理数の解をもたないことを背理法を用いて示せ。

**4** 関数

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{\log x}{x} \quad (x > 0)$$

を考える．次の問に答えよ．ただし， $e$  は自然対数  $\log x$  の底である．

(1)  $f(x)$  の極値と変曲点を求め，グラフの概形を描け．ここで  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$  を用いてよい．また，グラフと座標軸との交点の座標は求めなくてよい．

(2) 定積分  $\int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx$  の値を求めよ．

**5** 白球 3 個，赤球 2 個，青球 1 個の合計 6 個の球の入っている袋がある．最初に A 君が，次のルール (i)，(ii) に従って袋から球を 1 個または 2 個取り出す．次に B 君が同じルールに従って，袋に残った球を 1 個または 2 個取り出す．ただし，いったん取り出した球は元の袋には戻さないものとする．

(i) 取り出した 1 個目が赤球ならば，2 個目を取り出すことはできない．

(ii) 取り出した 1 個目が赤球以外ならば，さらに 1 個だけ取り出す．

白球は 1 点，赤球は 2 点，青球は 3 点とし，取り出した球の合計点を各自の得点とする．このとき次の問に答えよ．

(1) A 君と B 君の得点が同じになる確率  $p_1$  を求めよ．

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きくなる確率  $p_2$  を求めよ．

解答例

**1** (1) 行列  $A = \begin{pmatrix} k & 4 \\ -1 & k-4 \end{pmatrix}$  の逆行列が存在しないから、成分について

$$k(k-4) - 4 \cdot (-1) = (k-2)^2 = 0 \quad \text{よって} \quad \mathbf{k = 2}$$

(2)  $A$  の逆行列  $A^{-1} = \frac{1}{(k-2)^2} \begin{pmatrix} k-4 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix}$  より

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \frac{1}{(k-2)^2} \begin{pmatrix} k-4 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(\mathbf{k-2})^2} \begin{pmatrix} (\mathbf{k-4})\mathbf{a} - 4 & \mathbf{k-4} - 4\mathbf{b} \\ \mathbf{a} + \mathbf{k} & 1 + \mathbf{k}b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3)  $A$  の逆行列が存在しないとき,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$AX = B \text{ より } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -2 & -2b \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } \mathbf{a = -2, b = -\frac{1}{2}}$$

■

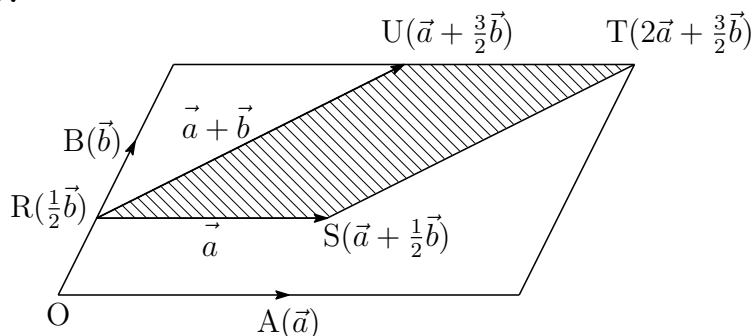
- 2 (1)  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BC}$  より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} &= t(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ \overrightarrow{OP} &= \vec{b} + t(2\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= 2t\vec{a} + (2t + 1)\vec{b}\end{aligned}$$

- (2)  $\overrightarrow{OP}$ ,  $\overrightarrow{OQ} = 2s\overrightarrow{OA} = 2s\vec{a}$  について, 2 点 P, Q の中点 M は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\{2t\vec{a} + (2t + 1)\vec{b}\} + \frac{1}{2} \cdot 2s\vec{a} \\ &= \frac{1}{2}\vec{b} + s\vec{a} + t(\vec{a} + \vec{b})\end{aligned}$$

$0 \leq s \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq 1$  であるから, 点 M の存在する範囲は, 下の図の斜線部分である.



- 3 (1)  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  が有理数の解  $\frac{n}{m}$  をもつとき ( $m$  は自然数,  $n$  は整数 (ただし,  $m, n$  は互いに素))

$$\left(\frac{n}{m}\right)^3 + a\left(\frac{n}{m}\right)^2 + b \cdot \frac{n}{m} + c = 0$$

したがって  $\frac{n^3}{m} = -an^2 - bnm - cm^2$

上式の左辺は整数であるから  $m = 1$

よって, 有理数の解をもつならば, その解は整数である.

- (2) 方程式  $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$  が, 有理数の解をもつと仮定すると, (1) の結果から, その解は整数であり, これを  $p$  とすると

$$p^3 + 2p^2 + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 2 = -p^2(p + 2) \quad (*)$$

$p^2$  は 2 の因数であるから  $p = \pm 1$

これらは, (\*) を満たさないから, 方程式は有理数の解をもたない. ■

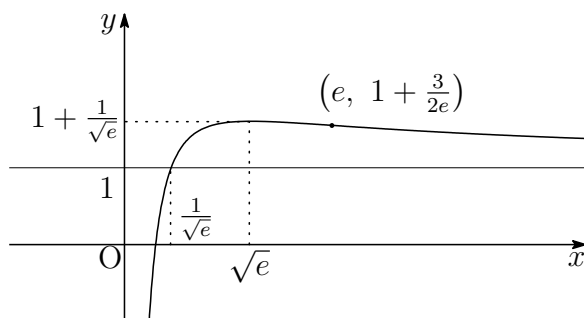
4 (1)  $f(x) = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{\log x}{x}$  より ( $x > 0$ )

$$f'(x) = \frac{1 - 2\log x}{2x^2}, \quad f''(x) = \frac{2(\log x - 1)}{x^3}$$

|          |          |            |            |            |     |            |
|----------|----------|------------|------------|------------|-----|------------|
| $x$      | (0)      | $\cdots$   | $\sqrt{e}$ | $\cdots$   | $e$ | $\cdots$   |
| $f'(x)$  |          | +          | 0          | −          | −   | −          |
| $f''(x)$ |          | −          | −          | −          | 0   | +          |
| $f(x)$   | $\cdots$ | $\nearrow$ | 極大         | $\searrow$ | 変曲点 | $\searrow$ |

したがって、極大値  $f(\sqrt{e}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{e}}$ , 変曲点  $\left(e, 1 + \frac{3}{2e}\right)$

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$  より, グラフの概形は, 次のようになる.



(2)  $\int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx = \left[ x + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^e = e + 1 - \frac{1}{e}$

■

5 (1) (i) A 君が「赤」(2点)のとき(確率 $\frac{2}{6}$ )

|     |                                               |    |                                 |                                                                 |    |                                 |
|-----|-----------------------------------------------|----|---------------------------------|-----------------------------------------------------------------|----|---------------------------------|
| B 君 | 赤                                             | 白白 | 白赤                              | 白青                                                              | 青白 | 青赤                              |
| 得点  | 2点                                            |    | 3点                              | 4点                                                              |    | 5点                              |
| 確率  | $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$ |    | $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}$ | $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}$ |    | $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}$ |

(ii) A 君が「白白」(2点)のとき(確率 $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$ )

|     |               |                                 |                                                                 |    |                                 |
|-----|---------------|---------------------------------|-----------------------------------------------------------------|----|---------------------------------|
| B 君 | 赤             | 白赤                              | 白青                                                              | 青白 | 青赤                              |
| 得点  | 2点            | 3点                              | 4点                                                              |    | 5点                              |
| 確率  | $\frac{2}{4}$ | $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ | $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$ |    | $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ |

(iii) A 君が「白赤」(3点)のとき(確率 $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$ )

|     |                                               |    |                                 |                                                                 |    |                                 |
|-----|-----------------------------------------------|----|---------------------------------|-----------------------------------------------------------------|----|---------------------------------|
| B 君 | 赤                                             | 白白 | 白赤                              | 白青                                                              | 青白 | 青赤                              |
| 得点  | 2点                                            |    | 3点                              | 4点                                                              |    | 5点                              |
| 確率  | $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$ |    | $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$ | $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ |    | $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$ |

(iv) A 君が「白青, 青白」(4点)のとき(確率 $\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}$ )

|     |                                               |    |                                 |
|-----|-----------------------------------------------|----|---------------------------------|
| B 君 | 赤                                             | 白白 | 白赤                              |
| 得点  | 2点                                            |    | 3点                              |
| 確率  | $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$ |    | $\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3}$ |

(v) A 君が「青赤」(5点)のとき(確率 $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5}$ )

|     |                                               |    |                                 |
|-----|-----------------------------------------------|----|---------------------------------|
| B 君 | 赤                                             | 白白 | 白赤                              |
| 得点  | 2点                                            |    | 3点                              |
| 確率  | $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ |    | $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$ |

(i)~(iii)の場合から

$$p_1 = \frac{2}{6} \left( \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \right) + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{10}$$

(2) (iii)~(iv)の場合から

$$p_2 = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \left( \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$$

