

平成 25 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分

文・法・経済・経営・国際文化・発達科学

(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・

医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

- 1 空間において, 2 点 $A(0, 1, 0)$, $B(-1, 0, 0)$ を通る直線を ℓ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 点 P を ℓ 上に, 点 Q を z 軸上にとる. $\overrightarrow{PQ}$ がベクトル $(3, 1, -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ.
- (2) 点 R を ℓ 上に, 点 S を z 軸上にとる. $\overrightarrow{RS}$ が $\overrightarrow{AB}$ およびベクトル $(0, 0, 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ.
- (3) R, S を (2) で求めた点とする. 点 T を ℓ 上に, 点 U を z 軸上にとる. また, $\vec{v} = (a, b, c)$ は零ベクトルではなく, $\overrightarrow{RS}$ に垂直ではないとする. $\overrightarrow{TU}$ が $\vec{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ.

- 2 a, b, c は実数とし, $a < b$ とする. 平面上の相異なる 3 点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$ が, 辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする. 次の問いに答えよ.

- (1) a を b, c を用いて表せ.
- (2) $b - a \geq 2$ が成り立つことを示せ.
- (3) 斜辺 AB の長さの最小値と, そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ.

- 3 赤色, 緑色, 青色のさいころが各 2 個ずつ, 計 6 個ある. これらを同時にふるとき,

赤色の 2 個のさいころの出た目の数 r_1, r_2 に対し $R = |r_1 - r_2|$

緑色の 2 個のさいころの出た目の数 g_1, g_2 に対し $G = |g_1 - g_2|$

青色の 2 個のさいころの出た目の数 b_1, b_2 に対し $B = |b_1 - b_2|$

とする. 次の問いに答えよ.

- (1) R がとりうる値と, R がそれらの各値をとる確率をそれぞれ求めよ.
- (2) $R \geq 4, G \geq 4, B \geq 4$ が同時に成り立つ確率を求めよ.
- (3) $RGB \geq 80$ となる確率を求めよ.

解答例

- 1 (1) P は直線 AB 上の点であるから, 実数 α を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) + \alpha(-1, -1, 0) = (-\alpha, 1 - \alpha, 0)$$

点 Q を $(0, 0, q)$ とおくと

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (0, 0, q) - (-\alpha, 1 - \alpha, 0) = (\alpha, \alpha - 1, q)$$

$\overrightarrow{PQ}$ がベクトル $(3, 1, -1)$ に平行であるから

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha - 1}{1} = \frac{q}{-1} \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{3}{2}, \quad q = -\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OP} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \text{ であるから } P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), Q\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

- (2) R は直線 AB 上の点であるから, 実数 β を用いて $\overrightarrow{OR} = (-\beta, 1 - \beta, 0)$

点 S を $(0, 0, s)$ とおくと $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} = (\beta, \beta - 1, s)$

$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 0)$ およびベクトル $(0, 0, 1)$ に垂直なベクトルの 1 つは
 $(1, -1, 0)$

$\overrightarrow{RS}$ はこのベクトルと平行であるから $\frac{\beta}{1} = \frac{\beta - 1}{-1}, s = 0$

これを解いて $\beta = \frac{1}{2}$ ゆえに $R\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), S(0, 0, 0)$

- (3) $\overrightarrow{RS} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ は $\vec{v} = (a, b, c)$ に垂直ではないから

$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \neq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a - b \neq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

T は直線 AB 上の点であるから, 実数 t を用いて $\overrightarrow{OT} = (-t, 1 - t, 0)$

点 U を $(0, 0, u)$ とおくと $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{OU} - \overrightarrow{OT} = (t, t - 1, u)$

$\overrightarrow{TU}$ は $\vec{v} = (a, b, c)$ に平行であるから, 実数 k を用いて

$$\overrightarrow{TU} = k\vec{v} \quad \text{ゆえに} \quad (t, t - 1, u) = k(a, b, c)$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} t = ka \\ t - 1 = kb \\ u = kc \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad k(a - b) = 1 \quad \textcircled{1} \text{ より} \quad k = \frac{1}{a - b}$$

$$t = \frac{a}{a - b}, u = \frac{c}{a - b} \text{ より } T\left(\frac{a}{b - a}, \frac{b}{b - a}, 0\right), U\left(0, 0, \frac{c}{a - b}\right)$$

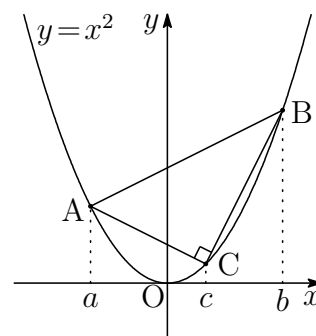
■

- 2** (1) 3点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$ は、放物線 $y = x^2$ 上の点である.

直線 BC の傾きは $\frac{c^2 - b^2}{c - b} = b + c$

直線 AC の方程式は

$$y - c^2 = -\frac{1}{b + c}(x - c)$$



点 $A(a, a^2)$ は、この直線上の点であるから $(a - c \neq 0)$

$$a^2 - c^2 = -\frac{a - c}{b + c} \quad \text{ゆえに} \quad a + c = -\frac{1}{b + c}$$

よって $a = -c - \frac{1}{b + c}$

(2) (1) の結果から $b - a = b + c + \frac{1}{b + c}$

$b - a > 0$ であるから、上式より $b + c > 0$

したがって、相加平均・相乗平均の関係により

$$b - a = b + c + \frac{1}{b + c} \geq 2\sqrt{(b + c) \cdot \frac{1}{b + c}} = 2$$

(3) $AB^2 = (b - a)^2 + (b^2 - a^2) = (b - a)^2\{1 + (a + b)^2\}$

上式より、AB が最小となるとき、(2) の結果に注意して

$$b - a = 2, a + b = 0 \quad \text{すなわち} \quad a = -1, b = 1$$

これを (1) の結果に代入して

$$-1 = -c - \frac{1}{1 + c} \quad \text{これを解いて} \quad c = 0$$

よって $A(-1, 1), B(1, 1), C(0, 0), AB = 2$ ■

- 3** (1) r_1, r_2 に対する $R = |r_1 - r_2|$ の値は、右の表のようになる。したがって、 R のとりうる値とその確率は次のようになる。

R	0	1	2	3	4	5
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

$r_1 \backslash r_2$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

- (2) (1) の結果から、 $R \geq 4$ となる確率は $\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$

同様に、 $G \geq 4, B \geq 4$ となる確率はともに $\frac{1}{6}$

よって、求める確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

- (3) $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75, 4^2 \cdot 5 = 80$ より、 $RGB \geq 80$ となる $\{R, G, B\}$ の組は

$$\{4, 4, 5\}, \{4, 5, 5\}, \{5, 5, 5\}$$

また、 $R = G = B = 4$ となる確率は $\left(\frac{1}{9}\right)^3$

これと (2) の結果から、求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{3^3 - 2^3}{18^3} = \frac{19}{5832}$$

■