

平成 24 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分

文・法・経済・経営・国際文化・発達科学

(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・

医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

- 1 座標平面上に 2 点 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ と直線 ℓ があり, A と ℓ の距離と B と ℓ の距離の和が 1 であるという. 以下の問に答えよ.

- (1) ℓ は y 軸と平行でないことを示せ.
- (2) ℓ が線分 AB と交わるとき, ℓ の傾きを求めよ.
- (3) ℓ が線分 AB と交わらないとき, ℓ と原点との距離を求めよ.

- 2 a を正の実数とする. 2 つの放物線

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3a$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2$$

が異なる 2 点で交わるとし, 2 つの放物線によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする. 以下の問に答えよ.

- (1) a の値の範囲を求めよ.
- (2) $S(a)$ を a を用いて表せ.
- (3) $S(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ.

- 3 以下の問に答えよ.

- (1) 正の実数 x, y に対して

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$$

が成り立つことを示し, 等号が成立するための条件を求めよ.

- (2) n を自然数とする. n 個の正の実数 $a_1, \dots, a_n$ に対して

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

が成り立つことを示し, 等号が成立するための条件を求めよ.

解答例

- 1 (1) y 軸と平行な直線 ℓ の方程式を $x = k$ とおくと (k は定数)

$$A(1, 0) \text{ と } \ell \text{ の距離は } |k - 1|$$

$$B(-1, 0) \text{ と } \ell \text{ の距離は } |k + 1|$$

一般に、2 つの実数 a, b について

$$|a| + |b| = \max(|a + b|, |a - b|)$$

であるから、 $a = k - 1, b = k + 1$ とすると

$$|k - 1| + |k + 1| = \max(|2k|, 2)$$

$|k - 1| + |k + 1| \geq 2$ であるから、このとき、 A と ℓ の距離と B と ℓ の距離の和が 2 以上となり、条件に反する。よって、 ℓ は y 軸と平行でない。

- (2) ℓ の傾きを m とし、その方程式を $mx - y + n = 0$ とすると、条件から

$$\frac{|m + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{|-m + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

$$\text{したがって} \quad \frac{|m + n| + |-m + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \quad \dots (*)$$

ここで、 $f(x, y) = mx - y + n$ とおくと

$$f(1, 0) = m + n, \quad f(-1, 0) = -m + n$$

ℓ が線分 AB と交わるから

$$f(1, 0)f(-1, 0) \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (m + n)(-m + n) \leq 0$$

$$\text{このとき} \quad |m + n| + |-m + n| = |(m + n) - (-m + n)| = |2m|$$

$$\text{これを } (*) \text{ に代入して} \quad \frac{|2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \quad \text{よって} \quad m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(3) \ell \text{ と原点の距離を } d \text{ とすると} \quad d = \frac{|n|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

ℓ が線分 AB と交わらないから

$$f(1, 0)f(-1, 0) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (m + n)(-m + n) \geq 0$$

$$\text{このとき} \quad |m + n| + |-m + n| = |(m + n) + (-m + n)| = |2n|$$

$$\text{これを } (*) \text{ に代入して} \quad \frac{|2n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \quad \text{よって} \quad d = \frac{|n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

- 2** (1) 2つの放物線の方程式から y を消去すると

$$\frac{1}{2}x^2 - 3a = -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2$$

整理すると $(x - a)^2 = 3a - a^3 \quad \dots \textcircled{1}$

2つの放物線が2点で交わる条件は

$$3a - a^3 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) < 0$$

a は正であるから $0 < a < \sqrt{3}$

- (2) 2つの放物線の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると, $\textcircled{1}$ より

$$\alpha = a - \sqrt{3a - a^3}, \quad \beta = a + \sqrt{3a - a^3}$$

したがって

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 - 3a \right) \right\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \{ (x - a)^2 - (3a - a^3) \} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}(2\sqrt{3a - a^3})^3 = \frac{4}{3}(3a - a^3)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

- (3) $f(a) = 3a - a^3$ ($0 \leq a \leq \sqrt{3}$) とおくと

$$f'(a) = -3a^2 + 3 = -3(a + 1)(a - 1)$$

a	0	$\dots$	1	$\dots$	$\sqrt{3}$
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$S(a) = \frac{4}{3}\{f(a)\}^{\frac{3}{2}}$ であるから, $S(a)$ の最大値は

$$a = 1 \text{ のとき, 最大値 } \frac{4}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

■

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \frac{y}{x} + \frac{x}{y} - 2 = \left(\sqrt{\frac{y}{x}} - \sqrt{\frac{x}{y}} \right)^2 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$$

なお、等号が成立するための条件は

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{x}{y}} \quad \text{すなわち} \quad x = y$$

$$(2) \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j, \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{a_j}{a_k} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} \frac{a_j}{a_k} \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{a_j}{a_k} + \sum_{1 \leq k < j \leq n} \frac{a_j}{a_k} + \sum_{1 \leq j = k \leq n} \frac{a_j}{a_k} \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{a_j}{a_k} + \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{a_k}{a_j} + n = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(\frac{a_j}{a_k} + \frac{a_k}{a_j} \right) + n \\ &\geq \sum_{1 \leq j < k \leq n} 2 + n = {}_nC_2 \cdot 2 + n = n^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

なお、等号が成立するための条件は、 $1 \leq j < k \leq n$ について $a_j = a_k$

すなわち $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

解説

$a > 0, b > 0$ のとき $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$

よって $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \cdots (*)$ (等号は $a = b$ のとき成立する)

$a_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) のとき

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad \cdots (**)$$

(等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき成立する)

が成り立つことを示す. $(*)$ より

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &\geq 2(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}) \\ &\geq 4\sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4}} = 4\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \end{aligned}$$

同様のことを繰り返すと, $n = 2^k$ のときに $(**)$ が成立することが示される.

$n = 2^k$ のときは $2^{k-1} < n < 2^k$ となる k に対して, $n + m = 2^k$ となるように m を定め, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = np$ とおくと

$$\frac{1}{n+m} (\overbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}^{n \text{ 個}} + \overbrace{p + \cdots + p}^{m \text{ 個}}) \geq \sqrt[n+m]{a_1 a_2 \cdots a_n p^m}$$

左辺は $\frac{1}{n+m}(np + mp) = p$ であるから

$$\begin{aligned} p &\geq \sqrt[n+m]{a_1 a_2 \cdots a_n p^m} \\ p^{n+m} &\geq a_1 a_2 \cdots a_n p^m \\ p^n &\geq a_1 a_2 \cdots a_n \end{aligned}$$

よって, すべての自然数 n について, $(**)$ が成立する.

n 個の正の実数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ の相加平均 A , 相乗平均 G , 調和平均 H は

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \quad \frac{1}{H} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right)$$

相加平均 $\geq$ 相乗平均 の大小関係を $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ に適用すると

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{H} \geq \frac{1}{G}$$

よって $A \geq G \geq H$ (等号が成立する条件は, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$)

本題の左辺から $nA \cdot \frac{n}{H} = n^2 \cdot \frac{A}{H} \geq n^2$

上式の等号が成立する条件は, $A = H$, すなわち, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ■