

平成 23 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分

文・法・経済・経営・国際文化・発達科学

(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・

医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

1 実数 x, y に対して, 等式

$$x^2 + y^2 = x + y \quad \cdots \textcircled{1}$$

を考える. $t = x + y$ とおく. 以下の問に答えよ.

- (1) ① の等式が表す xy 平面上の図形を図示せよ.
- (2) x と y が ① の等式をみたすとき, t のとりうる値の範囲を求めよ.
- (3) x と y が ① の等式をみたすとする.

$$F = x^3 + y^3 - x^2y - xy^2$$

を t を用いた式で表せ. また, F のとりうる値の最大値と最小値を求めよ.

2 xy 平面上に相異なる 4 点 A, B, C, D があり, 線分 AC と BD は原点 O で交わっている. 点 A の座標は (1, 2) で, 線分 OA と OD の長さは等しく, 四角形 ABCD は円に内接している. $\angle AOD = \theta$ とおき, 点 C の x 座標を a , 四角形 ABCD の面積を S とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 線分 OC の長さを a を用いた式で表せ. また, 線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ.
- (2) S を a と θ を用いた式で表せ.
- (3) $\theta = \frac{\pi}{6}$ とし, $20 \leq S \leq 40$ とするとき, a のとりうる値の最大値を求めよ.

- 3** 袋の中に0から4までの数字のうち1つが書かれたカードが1枚ずつ合計5枚入っている．4つの数0, 3, 6, 9をマジックナンバーと呼ぶことにする．次のようなルールをもつ, 1人で行うゲームを考える．

[ルール] 袋から無作為に1枚ずつカードを取り出していく．ただし, 一度取り出したカードは袋に戻さないものとする．取り出したカードの数字の合計がマジックナンバーになったとき, その時点で負けとし, それ以降はカードを取り出さない．途中で負けとなることなく, すべてのカードを取り出せたとき, 勝ちとする．

以下の問に答えよ．

- (1) 2枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ．
- (2) 3枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ．
- (3) このゲームで勝つ確率を求めよ．

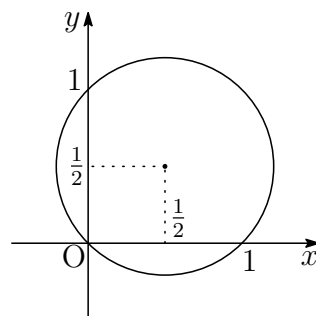
解答例

1 (1) $x^2 + y^2 = x + y \cdots \textcircled{1}$

これを变形すると

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

よって、中心 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 、半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円



(2) 円 $\textcircled{1}$ の中心 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ と直線 $x + y - t = 0$ との距離を d とすると

$$d = \frac{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - t\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|t - 1|}{\sqrt{2}}$$

$\textcircled{1}$ の半径 r は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 、このとき、 $d \leq r$ であるから

$$\frac{|t - 1|}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{これを解いて} \quad 0 \leq t \leq 2$$

別解 2 次方程式 $u^2 - (x + y)u + xy = 0$ の解 x, y が実数解であるとき

$$D = (x + y)^2 - 4xy \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 4xy \leq t^2$$

$$\textcircled{1} \text{ より } (x + y)^2 = 2xy + x + y \quad \text{ゆえに} \quad 2xy = t^2 - t$$

$$xy \text{ を消去すると } 2(t^2 - t) \leq t^2 \quad \text{これを解いて} \quad 0 \leq t \leq 2$$

(3) $\textcircled{1}$ より $2xy = t^2 - t$

$$\begin{aligned} F &= x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \\ &= (x + y)^3 - 2 \cdot 2xy(x + y) \\ &= t^3 - 2(t^2 - t)t = -t^3 + 2t^2 \\ \frac{dF}{dt} &= -3t^2 + 4t = -t(3t - 4) \end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$\frac{dF}{dt}$		+	0	-	
F	0	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0

よって、 F は $t = \frac{4}{3}$ で最大値 $\frac{32}{27}$ 、 $t = 0, 2$ で最小値 0 をとる。 ■

- 2** (1) 点 C は直線 $OA : y = 2x$ 上にあり,

C の x 座標が a より $C(a, 2a)$

C は原点 O に関して A と反対側にあるから $a < 0$

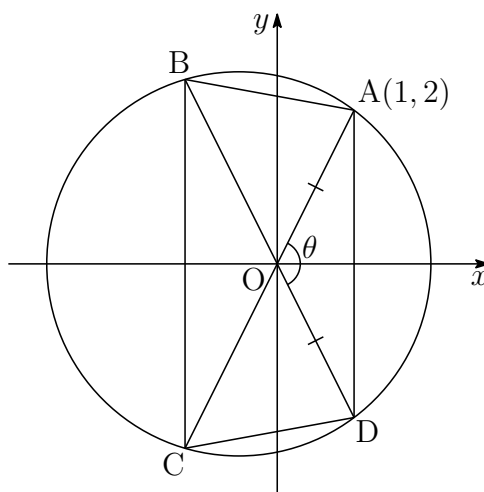
$$\begin{aligned} \text{よって } OC &= \sqrt{a^2 + (2a)^2} \\ &= \sqrt{5}|a| = -\sqrt{5}a \end{aligned}$$

方べきの定理により

$$OA \cdot OC = OB \cdot OD$$

条件により, $OA = OD$ であるから

$$OB = OC$$



- (2) (1) の結果から $AC = BD = OA + OC = \sqrt{5} + (-\sqrt{5}a) = \sqrt{5}(1 - a)$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin \theta = \frac{5}{2}(1 - a)^2 \sin \theta$$

- (3) (2) の結果から, $\theta = \frac{\pi}{6}$ より $S = \frac{5}{4}(1 - a)^2$

$20 \leq S \leq 40$ のとき

$$20 \leq \frac{5}{4}(1 - a)^2 \leq 40 \quad \text{ゆえに} \quad 4 \leq |1 - a| \leq 4\sqrt{2}$$

$a < 0$ より, $1 - a > 0$ であるから

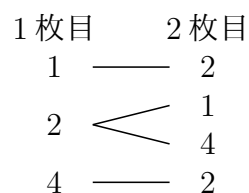
$$4 \leq 1 - a \leq 4\sqrt{2} \quad \text{これを解いて} \quad 1 - 4\sqrt{2} \leq a \leq -3$$

よって, a のとりうる値の最大値は -3

■

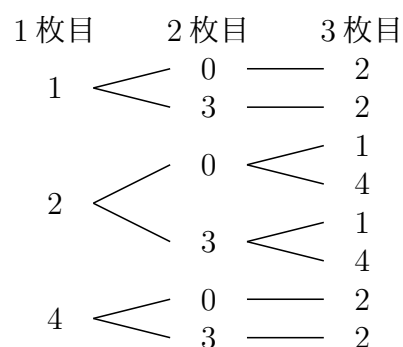
- 3** (1) n 枚目 ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) のカードを取り出したところで負けとなる確率を p_n とする.

2 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは、右のような場合で、求める確率は



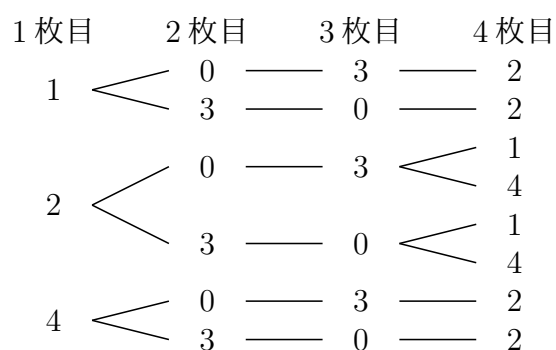
$$p_2 = \frac{4}{5 \cdot 4} = \frac{1}{5}$$

- (2) 3 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは、右のような場合で、求める確率は



$$p_3 = \frac{8}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$

- (3) 4 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは、右のような場合で、その確率は



$$p_4 = \frac{8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{15}$$

1 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは、0 または 3 のカードを取り出す確率であるから

$$p_1 = \frac{2}{5}$$

よって、このゲームで勝つ確率は

$$1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} \right) = \frac{1}{5}$$

別解 5枚のカードを, 0, 0, 1, 1, 2とし, 数0, 3をマジックナンバーとする.

(1) 2枚のカードを取り出したところで負けとなるのは

$$1-2, \quad 2-1$$

$$\text{よって} \quad p_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$$

(2) 3枚のカードを取り出したところで負けとなるのは

$$1-0-2, \quad 2-0-1$$

$$\text{よって} \quad p_3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

(3) 4枚のカードを取り出したところで負けとなるのは

$$1-0-0-2, \quad 2-0-0-1$$

$$\text{よって} \quad p_4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{15}$$

$p_1 = \frac{2}{5}$ であるから, 求める確率は

$$1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} \right) = \frac{1}{5}$$

■