

平成 22 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分

文・法・経済・経営・国際文化・発達科学

(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・

医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

- 1 実数 a, b に対して, $f(x) = a(x - b)^2$ とおく. ただし, a は正とする. 放物線 $y = f(x)$ が直線 $y = -4x + 4$ に接している. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) b を a を用いて表せ.
- (2) $0 \leq x \leq 2$ において, $f(x)$ の最大値 $M(a)$ と, 最小値 $m(a)$ を求めよ.
- (3) a が正の実数を動くとき, $M(a)$ の最小値を求めよ.

- 2 空間内に 4 点 O, A, B, C があり

$$OA = 3, \quad OB = OC = 4, \quad \angle BOC = \angle COA = \angle AOB = \frac{\pi}{3}$$

であるとする. 3 点 A, B, C を通る平面に垂線 OH をおろす. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とし, $\overrightarrow{OH} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ と表すとき, r, s, t を求めよ.
- (2) 直線 CH と直線 AB の交点を D とするとき, 長さの比 $CH : HD, AD : DB$ をそれぞれ求めよ.

- 3 a, b を自然数とする. 以下の問に答えよ.

- (1) ab が 3 の倍数であるとき, a または b は 3 の倍数であることを示せ.
- (2) $a + b$ と ab がともに 3 の倍数であるとき, a と b はともに 3 の倍数であることを示せ.
- (3) $a + b$ と $a^2 + b^2$ がともに 3 の倍数であるとき, a と b はともに 3 の倍数であることを示せ.

解答例

- 1** (1) $y = f(x)$ と $y = -4x + 4$ から y を消去すると

$$a(x - b)^2 = -4x + 4$$

$$\text{整理すると} \quad ax^2 - 2(ab - 2)x + ab^2 - 4 = 0$$

この方程式の判別式を D とすると, $D = 0$ であるから

$$D/4 = (ab - 2)^2 - a(ab^2 - 4) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad -ab + 1 + a = 0$$

$$a > 0 \text{ より, } a \neq 0 \text{ に注意して} \quad b = 1 + \frac{1}{a}$$

- (2) (1) の結果から, $y = f(x)$ の軸の方程式は $x = 1 + \frac{1}{a}$
 $a > 0$ より, 定義域 $0 \leq x \leq 2$ の中央 1 は, 軸よりも左側にある.
 定義域の左端 $x = 0$ で最大値をとるから

$$M(a) = f(0) = a \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2$$

- (i) $1 + \frac{1}{a} \leq 2$, すなわち, $a \geq 1$ のとき

$$m(a) = f\left(1 + \frac{1}{a}\right) = 0$$

- (ii) $2 < 1 + \frac{1}{a}$, すなわち, $0 < a < 1$ のとき

$$m(a) = f(2) = a \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2$$

$$\text{よって} \quad m(a) = \begin{cases} 0 & (a \geq 1) \\ a \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 & (0 < a < 1) \end{cases}$$

- (3) $a > 0$ であるから, 相加・相乗平均の大小関係により

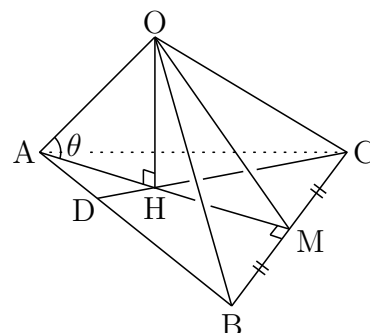
$$M(a) = a \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 = a + \frac{1}{a} + 2 \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} + 2 \geq 4$$

$$a = \frac{1}{a}, \text{ すなわち, } a = 1 \text{ のとき, 最小値 } 4 \text{ をとる.}$$



- 2** (1) 辺 BC の中点を M とすると、与えられた条件から、H は線分 AM 上にある。

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{AM}|^2 &= \left| \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} \right|^2 \\
 &= |\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{c}|^2 + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} \\
 &= 3^2 + \frac{1}{4} \cdot 4^2 + \frac{1}{4} \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 6 - 6 = 9
 \end{aligned}$$



$$\theta = \angle OAM \text{ とすると } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AM}|}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ここで } \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AM} &= -\vec{a} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a} \right) \\
 &= -\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 = -\frac{1}{2} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 + 3^2 = 3
 \end{aligned}$$

$$\text{したがって } \cos \theta = \frac{3}{3 \cdot 3} = \frac{1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad AH = OA \cos \theta = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

H は線分 AM を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OH} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}}{3} = \frac{1}{3} \left(2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$$

$$\text{よって } \boldsymbol{r = \frac{2}{3}, s = \frac{1}{6}, t = \frac{1}{6}}$$

別解 $\triangle OAB$ に余弦定理を適用すると

$$AB^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \frac{\pi}{3} = 13$$

$$AM \perp BC \text{ であるから } AM^2 = AB^2 - BM^2 = 13 - 4 = 9$$

$$\triangle OBC \text{ は正三角形であるから } OM = 2\sqrt{3}$$

$$\text{余弦定理を } \triangle OAM \text{ に適用すると } \cos \theta = \frac{OA^2 + AM^2 - OM^2}{2OA \cdot AM} = \frac{1}{3}$$

$$(2) \overrightarrow{CH} = \frac{2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}}{3} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{5}$$

$$\text{したがって } \overrightarrow{CD} = \frac{4\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{5}, \quad \overrightarrow{CH} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CD}$$

$$\text{よって } \boldsymbol{CH : HD = 5 : 1, \quad AD : DB = 1 : 4}$$



$$\begin{aligned}
 \boxed{3} \quad (1) \quad & a \not\equiv 0 \text{ かつ } b \not\equiv 0 \pmod{3} \\
 \implies & a \equiv \pm 1, b \equiv \pm 1 \pmod{3} \\
 \implies & ab \equiv 1 \text{ または } ab \equiv -1 \pmod{3} \\
 \implies & ab \not\equiv 0 \pmod{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } ab \equiv 0 \pmod{3} \implies a \equiv 0 \text{ または } b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$(2) \text{ 条件から (A) } \begin{cases} a + b \equiv 0 \\ ab \equiv 0 \end{cases} \pmod{3}$$

(1) の結論より, (A) の第 2 式から

$$a \equiv 0 \pmod{3}$$

としても一般性を失わない.

これと (A) の第 1 式により

$$b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{よって, (A) } \implies a \equiv b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$(3) \text{ 条件から (B) } \begin{cases} a + b \equiv 0 \\ a^2 + b^2 \equiv 0 \end{cases} \pmod{3}$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \text{ であるから}$$

$$(B) \implies \begin{cases} a + b \equiv 0 \\ -2ab \equiv 0 \end{cases} \pmod{3} \implies (A)$$

$$\text{よって, (2) の結論により (B) } \implies a \equiv b \equiv 0 \pmod{3}$$

