

平成 21 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分

文・法・経済・経営・国際文化・発達科学

(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・

医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

1 以下の問に答えよ.

(1) xy 平面において, $O(0, 0)$, $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とする. このとき,

$$(\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA})^2 + \left| \overrightarrow{OP} - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}) \overrightarrow{OA} \right|^2 \leq 1$$

をみたす点 P 全体のなす図形の面積を求めよ.

(2) xyz 空間において, $O(0, 0, 0)$, $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ とする. このとき,

$$(\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA})^2 + \left| \overrightarrow{OP} - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}) \overrightarrow{OA} \right|^2 \leq 1$$

をみたす点 P 全体のなす図形の体積を求めよ.

2 a を正の実数とし, $f(x) = -a^2x^2 + 4ax$ とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $0 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の最大値を求めよ.

(2) 2 点 $A(2, 3)$, $B(3, 3)$ を端点とする線分を ℓ とする. 曲線 $y = f(x)$ と線分 ℓ (端点を含む) が共有点を持つような a の値の範囲を求め, 数直線上に図示せよ.

3 以下の問に答えよ.

- (1) A, B の 2 人がそれぞれ, 「石」, 「はさみ」, 「紙」 の 3 種類の「手」から無作為に 1 つを選んで, 双方の「手」によって勝敗を決める. 「石」は「はさみ」に勝ち「紙」に負け, 「はさみ」は「紙」に勝ち「石」に負け, 紙は「石」に勝ち「はさみ」に負け, 同じ「手」どうしは引き分けとする. A が B に勝つ確率と引き分ける確率を求めよ.
- (2) 上の 3 種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ, これらに加えて, 4 種類目の「手」として「水」を加える. 「水」は「石」と「はさみ」には勝つが「紙」には負け, 同じ「手」どうしは引き分けとする. A, B がともに 4 種類の「手」から無作為に 1 つを選ぶとすると, A が勝つ確率と引き分けの確率を求めよ.
- (3) 上の 4 種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ, これらに加え, さらに第 5 の「手」として「土」を加える. B が 5 種類の「手」から無作為に 1 つを選ぶとき, A の勝つ確率が A の選ぶ「手」によらないようにするためには, 「土」と「石」「はさみ」「紙」「水」との勝敗規則をそれぞれどのように定めればよいか. ただし, 同じ「手」どうしの場合, しかもその場合にのみ引き分けとする.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \vec{OA} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ より } |\vec{OA}|^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \left| \vec{OP} - (\vec{OP} \cdot \vec{OA}) \vec{OA} \right|^2 &= |\vec{OP}|^2 - 2(\vec{OP} \cdot \vec{OA})^2 + (\vec{OP} \cdot \vec{OA})^2 |\vec{OA}|^2 \\ &= |\vec{OP}|^2 - (\vec{OP} \cdot \vec{OA})^2 \end{aligned}$$

$$(\vec{OP} \cdot \vec{OA})^2 + \left| \vec{OP} - (\vec{OP} \cdot \vec{OA}) \vec{OA} \right|^2 \leq 1 \text{ より } |\vec{OP}|^2 \leq 1$$

点 P は原点 O を中心とする半径 1 の円周およびその内部であるから、
求める面積は

$$\pi \cdot 1^2 = \pi$$

$$(2) \quad \vec{OA} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ より } |\vec{OA}|^2 = 1$$

$$(1) \text{ と同様にして } |\vec{OP}|^2 \leq 1$$

点 P は原点 O を中心とする半径 1 の球面およびその内部であるから、
求める体積は

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi$$



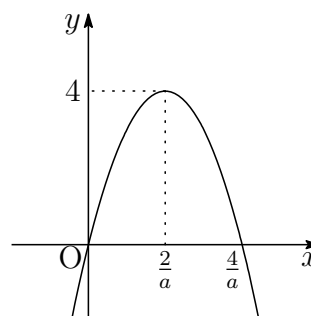
2 (1) $f(x) = -a^2x^2 + 4ax$
 $= -a^2\left(x - \frac{2}{a}\right)^2 + 4$

(i) $3 \leq \frac{2}{a}$, すなわち, $0 < a \leq \frac{2}{3}$ のとき

最大値 $f(3) = -9a^2 + 12a$

(ii) $\frac{2}{a} \leq 3$, すなわち, $a \geq \frac{2}{3}$ のとき

最大値 $f\left(\frac{2}{a}\right) = 4$



(2) $f(x) = 3$ とすると $-a^2x^2 + 4ax = 3$

ゆえに $(ax - 1)(ax - 3) = 0$

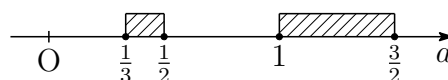
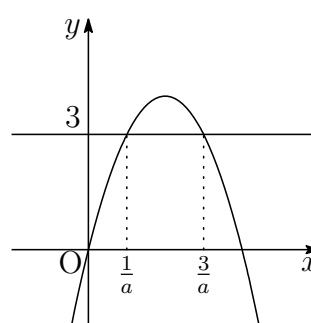
これを解いて $x = \frac{1}{a}, \frac{3}{a}$

条件から

$$2 \leq \frac{1}{a} \leq 3 \quad \text{または} \quad 2 \leq \frac{3}{a} \leq 3$$

したがって $\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{2}, \quad 1 \leq a \leq \frac{3}{2}$

よって, a の値の範囲を数直線上に図示すると



■

- 3** (1) A の勝ち (○)・負け (×)・引き分け (△) を表にすると、次のようになる。

A \ B	石	はさみ	紙
石	△	○	×
はさみ	×	△	○
紙	○	×	△

よって A が勝つ確率は $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

A が引き分ける確率は $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

- (2) (1) と同様に、A の勝敗表は次のようになる。

A \ B	石	はさみ	紙	水
石	△	○	×	×
はさみ	×	△	○	×
紙	○	×	△	○
水	○	○	×	△

よって A が勝つ確率は $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

A が引き分ける確率は $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

- (3) (2) の勝敗表に「土」を加えたとき、これが A の「手」によらず勝つ確率が不変であるのは次のようになる。

A \ B	石	はさみ	紙	水	土
石	△	○	×	×	○
はさみ	×	△	○	×	○
紙	○	×	△	○	×
水	○	○	×	△	×
土	×	×	○	○	△

よって、「土」は「石」「はさみ」に負け、「紙」「水」に勝つ。 ■