

平成 19 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分

文・法・経済・経営・国際文化・発達科学

(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・

医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

1 次の問に答えよ.

- (1) 漸化式 $x_{n+1} - a = -2x_n + 2a$ (a は定数) で定まる数列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ の一般項 x_n を x_1, a を用いて表せ.
- (2) xy 平面において曲線 $C: y = f(x) = x^3 - 3ax^2$ (a は定数) を考える. C 上に点 $P_1(t_1, f(t_1))$ をとる. ただし, $t_1 \neq a$ とする. P_1 における C の接線と C の交点のうち, P_1 と異なるものを $P_2(t_2, f(t_2))$ とする. t_2 を t_1, a を用いて表せ.
- (3) さらに, P_2 における C の接線と C の交点のうち, P_2 と異なるものを P_3 とする. 以下同様に $P_4, P_5, P_6, \dots$ を定める. $P_1, P_2, P_3, \dots$ はすべて異なることを示せ.

2 xy 平面における曲線 $C: y = x^2$ と直線 $l: y = ax$ (a は正の定数) について, 次の問に答えよ.

- (1) l と平行な, C の接線 m の方程式を a を用いて表せ.
- (2) 原点 O と m の距離を a を用いて表せ.
- (3) l と C の交点のうち O 以外のものを P とする. 線分 OP を一辺とする四角形 $OPQR$ が長方形になるように, m 上に 2 点 Q, R をとる. この長方形の面積が 2 となるときの a の値を求めよ.

3 次の問に答えよ.

- (1) 1, 2, 3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ. 選ばれた数の和が 3 の倍数となる組合せをすべて求めよ.
- (2) 1 の数字を書いたカードを 3 枚, 2 の数字を書いたカードを 3 枚, 3 の数字を書いたカードを 3 枚, 計 9 枚用意する. この中から無作為に, 一度に 3 枚のカードを選んだとき, カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を求めよ.

解答例

1 (1) $x_{n+1} - a = -2x_n + 2a$ より $x_{n+1} - a = -2(x_n - a)$

数列 $\{x_n - a\}$ は初項 $x_1 - a$, 公比 -2 の等比数列であるから

$$x_n - a = (x_1 - a)(-2)^{n-1} \quad \text{よって} \quad x_n = a + (x_1 - a)(-2)^{n-1}$$

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P_1(t_1, f(t_1))$ における接線の方程式は

$$y = f'(t_1)(x - t_1) + f(t_1)$$

曲線 $y = f(x)$ とこの接線の共有で、点 $P_1(t_1, f(t_1))$ と異なる点の x 座標は

$$f(x) = f'(t_1)(x - t_1) + f(t_1) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{f(x) - f(t_1)}{x - t_1} = f'(t_1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad \frac{f(x) - f(t_1)}{x - t_1} &= \frac{(x^3 - 3ax^2) - (t_1^3 - 3at_1^2)}{x - t_1} \\ &= \frac{x^3 - t_1^3}{x - t_1} - 3a \cdot \frac{x^2 - t_1^2}{x - t_1} \\ &= x^2 + t_1x + t_1^2 - 3a(x + t_1) \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax \quad \text{より} \quad f'(t_1) = 3t_1^2 - 6at_1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

①に②, ③を代入すると

$$\begin{aligned} x^2 + t_1x + t_1^2 - 3a(x + t_1) &= 3t_1^2 - 6at_1 \\ (x - t_1)(x + 2t_1) - 3a(x - t_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$x - t_1 \neq 0 \quad \text{より} \quad x + 2t_1 - 3a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = -2t_1 + 3a$$

$$\text{よって} \quad t_2 = -2t_1 + 3a$$

(3) (2)の結果から、 P_n の x 座標を t_n とすると $t_{n+1} = -2t_n + 3a$

ゆえに $t_{n+1} - a = -2t_n + 2a$ (1)の結果から $t_n = a + (t_1 - a)(-2)^{n-1}$
ある自然数 l, m について、 $t_l = t_m$ ならば

$$a + (t_1 - a)(-2)^{l-1} = a + (t_1 - a)(-2)^{m-1}$$

$$t_1 \neq a \quad \text{より} \quad (-2)^{l-1} = (-2)^{m-1} \quad \text{ゆえに} \quad l = m$$

よって、 $l \neq m$ のとき、 $t_l \neq t_m$

発展 $y = f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ は ($p \neq 0$) は, テイラー展開を利用すると ¹

$$y = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 + p(x-t)^3$$

となる. 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線は

$$y = f(t) + f'(t)(x-t)$$

上の2式から, 接点と異なる点の x 座標は

$$\frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 + p(x-t)^3 = 0$$

$$\text{ゆえに } \frac{f''(t)}{2} + p(x-t) = 0 \quad \text{よって} \quad x = t - \frac{f''(t)}{2p}$$

本題では $f(x) = x^3 - 3ax^2$ より, $f''(x) = 6x - 6a$ であるから

$$x = t_1 - \frac{6t_1 - 6a}{2 \cdot 1} = -2t_1 + 3a$$



¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/taylor.pdf>

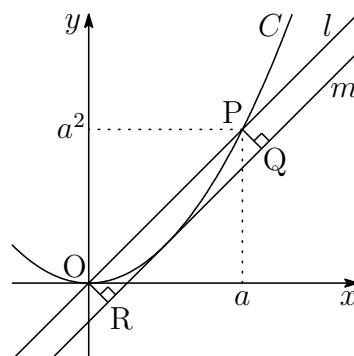
2 (1) $y = x^2$ より $y' = 2x$

l と平行な接線 m の接点の x 座標は

$$2x = a \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{a}{2}$$

よって, m は点 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}\right)$ を通り, 傾き a の直線であるから

$$y - \frac{a^2}{4} = a\left(x - \frac{a}{2}\right) \quad \text{よって} \quad y = ax - \frac{a^2}{4}$$



別解 直線 m の方程式を $y = ax + b$ とおくと, これと C の方程式から y を消去して整理すると

$$x^2 - ax - b = 0$$

このとき, 係数について $(-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b) = 0$ ゆえに $b = -\frac{a^2}{4}$

よって, 接線 m の方程式は $y = ax - \frac{a^2}{4}$

(2) (1) で求めた接線 $m: ax - y - \frac{a^2}{4} = 0$ と原点の距離を d とすると

$$d = \frac{\left| -\frac{a^2}{4} \right|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{a^2}{4\sqrt{a^2 + 1}}$$

(3) $a > 0$ に注意して $OP = \sqrt{a^2 + (a^2)^2} = a\sqrt{a^2 + 1}$
 $d = OR$ であるから, 長方形 $OPQR$ の面積は

$$OP \cdot OR = a\sqrt{a^2 + 1} \cdot \frac{a^2}{4\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{a^3}{4}$$

この長方形の面積が 2 であるから

$$\frac{a^3}{4} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a^3 = 8 \quad \text{よって} \quad a = 2$$

■

3 (1) $\{1, 1, 1\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 2, 2\}, \{3, 3, 3\}$

(2) (1) の結果により, 目の組合せが $\{1, 1, 1\}, \{2, 2, 2\}, \{3, 3, 3\}$ であるのはそれぞれ 1 通り. 目の組合せが $\{1, 2, 3\}$ であるのは, $({}_3C_1)^3$ 通り.

よって, 求める確率は

$$\frac{3 \cdot 1 + ({}_3C_1)^3}{{}_9C_3} = \frac{3 + 27}{84} = \frac{5}{14}$$

■