

平成 17 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分

文・法・経済・経営・国際文化・発達科学

(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・

医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

- 1 三角形 OAB において、辺 OA, 辺 OB の長さをそれぞれ a, b とする. また, 角 AOB は直角ではないとする. 2 つのベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を k とおく. 次の問に答えよ.

- (1) 直線 OA 上に点 C を, $\overrightarrow{BC}$ が $\overrightarrow{OA}$ と垂直になるようにとる. $\overrightarrow{OC}$ を $a, k, \overrightarrow{OA}$ を用いて表せ.
- (2) $a = \sqrt{2}, b = 1$ とする. 直線 BC 上に点 H を, $\overrightarrow{AH}$ が $\overrightarrow{OB}$ と垂直になるようにとる. $\overrightarrow{OH} = u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB}$ とおくと, u と v をそれぞれ k で表せ.

- 2 a を正の実数とする. 関数 $f(x) = ax^2 + (1 - 2a)x$ が次の 2 つの条件

- (i) $-3 \leq x < 0$ のとき, $f(x) \geq -1$
 (ii) $x \geq 0$ のとき, $f(x) \geq 0$

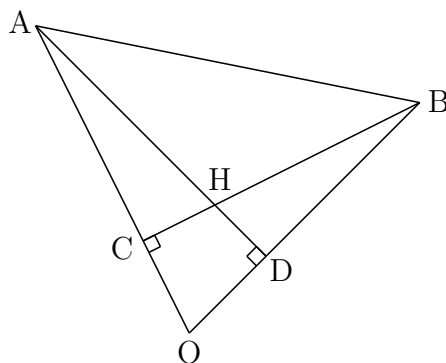
をともに満たすような a の値の範囲を求めよ.

- 3 a を正の実数とする. 次の問に答えよ.

- (1) $y = |x^2 - a|x||$ のグラフをかけ.
- (2) $F(a) = \int_{-1}^1 |x^2 - a|x| dx$ を求めよ.
- (3) $F(a)$ の最小値を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \overrightarrow{OC} = \frac{(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}|^2} \overrightarrow{OA} = \frac{k}{a^2} \overrightarrow{OA}$$



(2) 2 直線 AH と OB の交点を D とすると

$$\overrightarrow{OD} = \frac{(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OB}|^2} \overrightarrow{OB} = \frac{k}{b^2} \overrightarrow{OB}$$

$a = \sqrt{2}$, $b = 1$ のとき, (1) の結果および上式より

$$\overrightarrow{OC} = \frac{k}{2} \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OD} = k \overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{OH} = u \overrightarrow{OA} + v \overrightarrow{OB}$ より

$$\overrightarrow{OH} = u \overrightarrow{OA} + \frac{v}{k} \overrightarrow{OD}, \quad \overrightarrow{OH} = \frac{2u}{k} \overrightarrow{OC} + v \overrightarrow{OB}$$

H は直線 AD および直線 BC 上の点であるから

$$(*) \quad u + \frac{v}{k} = 1, \quad \frac{2u}{k} + v = 1$$

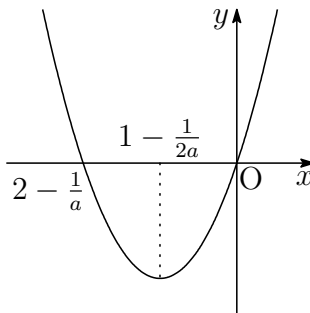
$$\text{ここで} \quad k^2 = (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2 < |\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 = a^2 b^2 = 2$$

これに注意すると, (*) の 2 式から

$$u = \frac{k(k-1)}{k^2-2}, \quad v = \frac{k(k-2)}{k^2-2}$$

■

2 $f(x) = ax^2 + (1 - 2a)x$ より $f(x) = a \left(x - 1 + \frac{1}{2a} \right)^2 - a \left(-1 + \frac{1}{2a} \right)^2$



条件 (ii) および $a > 0$ に注意して、次の場合分けを行う.

[1] $-3 \leq 1 - \frac{1}{2a} \leq 0$, すなわち, $\frac{1}{8} \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$f\left(1 - \frac{1}{2a}\right) = -a \left(1 - \frac{1}{2a}\right)^2 \geq -1$$

整理すると $4a^2 - 8a + 1 \leq 0$ すなわち $\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$

[2] $1 - \frac{1}{2a} < -3$, すなわち, $0 < a < \frac{1}{8}$ のとき

$$f(-3) = 15a - 3 \geq -1 \quad \text{ゆえに} \quad a \geq \frac{2}{15}$$

これは, $0 < a < \frac{1}{8}$ を満たさないから, 不適.

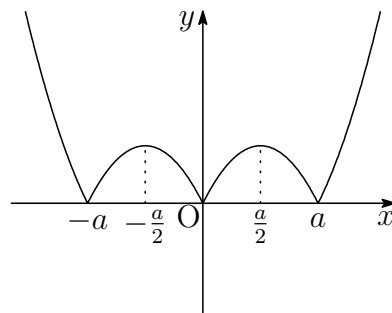
[1], [2] より $\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$



3 (1) $y = |x^2 - a|x||$ より

$$x \geq 0 \text{ のとき } y = |x(x - a)|$$

$$x \leq 0 \text{ のとき } y = |x(x + a)|$$



(2) (1) のグラフは y 軸に関して対称であるから

$$F(a) = 2 \int_0^1 |x^2 - ax| dx$$

(i) $0 < a \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} F(a) &= -2 \int_0^a (x^2 - ax) dx + 2 \int_a^1 (x^2 - ax) dx \\ &= -2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_0^a + 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_a^1 \\ &= \frac{2}{3}a^3 - a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(ii) $1 \leq a$ のとき

$$\begin{aligned} F(a) &= -2 \int_0^1 (x^2 - ax) dx = -2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_0^1 \\ &= a - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$(3) (2) \text{ の結果から } F'(a) = \begin{cases} 2a^2 - 1 & (0 < a \leq 1) \\ 1 & (1 \leq a) \end{cases}$$

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$F'(a)$		$-$	0	$+$
$F(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、求める最小値は $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$

■