

平成 16 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分

文・法・経済・経営・国際文化・発達科学

(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・

医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

- 1 平行四辺形 ABCD において、対角線 AC を 2 : 3 に内分する点を M、辺 AB を 2 : 3 に内分する点を N、辺 BC を $t : 1 - t$ に内分する点を L とし、AL と CN の交点を P とする。次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ とするとき、 $\overrightarrow{BP}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$, t を用いて表せ。

(2) 3 点 P, M, D が一直線上にあるとき、 t の値を求めよ。

- 2 a を正の実数とする。関数 $f(x) = -x^2 + ax$ について次の問に答えよ。

(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ を通る接線の方程式を a , t を用いて表せ。

(2) 点 $A(-a, 4a^2 - 5a + 2)$ から曲線 $y = f(x)$ へ接線が 2 本引けることを示せ。

(3) その 2 本の接線のうち接点の x 座標が大きい方の接線を ℓ , 接点を $P(t, f(t))$ とする。このとき、 $0 < t < a$ をみたすための a の範囲を求めよ。

(4) $a = 1$ のとき、直線 $x = -1$, 接線 ℓ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

- 3 初項が 1 で公差が自然数 d である等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。 $n \geq 3$ のとき、次の問に答えよ。

(1) $S_n = 94$ となる n と d がちょうど一組ある。その n と d を求めよ。

(2) $S_n = 98$ となる n と d の組はない。その理由を述べよ。

解答例

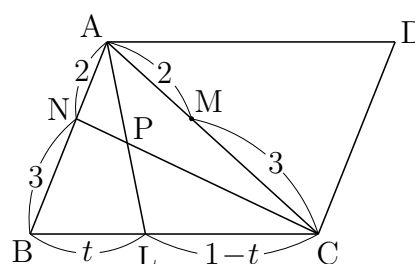
- 1 (1) $\triangle ABL$ と直線 CN について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BC}{CL} \cdot \frac{LP}{PA} = 1$$

ゆえに
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-t} \cdot \frac{LP}{PA} = 1$$

$$AP : PL = 2 : 3(1-t)$$

よって
$$\vec{BP} = \frac{3(1-t)\vec{BA} + 2\vec{BL}}{2 + 3(1-t)} = \frac{3(1-t)\vec{a} + 2t\vec{c}}{5-3t}$$



- (2) $\vec{BD} = \vec{a} + \vec{c}$, $\vec{BM} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{c}}{5}$ および (1) の結果から

$$\vec{MD} = \vec{BD} - \vec{BM} = \frac{2\vec{a} + 3\vec{c}}{5},$$

$$\vec{PD} = \vec{BD} - \vec{BP} = \frac{2\vec{a} + 5(1-t)\vec{c}}{5-3t}$$

$\vec{MD} // \vec{PD}$ であるから

$$5(1-t) = 3 \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{2}{5}$$

■

- 2 (1) $f(x) = -x^2 + ax$ より $f'(x) = -2x + a$

$y = f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y - (-t^2 + at) = (-2t + a)(x - t)$$

よって
$$y = (-2t + a)x + t^2$$

- (2) (1) で求めた接線が点 $A(-a, 4a^2 - 5a + 2)$ を通るから

$$4a^2 - 5a + 2 = (-2t + a)(-a) + t^2$$

ゆえに
$$(t + a)^2 = 6a^2 - 5a + 2$$

$$6a^2 - 5a + 2 = 6\left(a - \frac{5}{12}\right)^2 + \frac{23}{24} > 0 \text{ に注意すると}$$

$$t + a = \pm\sqrt{6a^2 - 5a + 2} \quad \text{ゆえに} \quad t = -a \pm \sqrt{6a^2 - 5a + 2}$$

実数 t が 2 つ存在するから、点 A から曲線 $y = f(x)$ へ 2 本接線が引ける。

(3) (2) の結果から, ℓ と曲線 $y = f(x)$ の接点の x 座標は

$$x = -a + \sqrt{6a^2 - 5a + 2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

これが $0 < t < a$ をみたすから ($a > 0$)

$$0 < -a + \sqrt{6a^2 - 5a + 2} < a \quad \text{ゆえに} \quad a^2 < 6a^2 - 5a + 2 < 4a^2$$

整理すると $(*) \begin{cases} 5a^2 - 5a + 2 > 0 \\ 2a^2 - 5a + 2 < 0 \end{cases}$

(*) の第 1 式について $5a^2 - 5a + 2 = 5\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

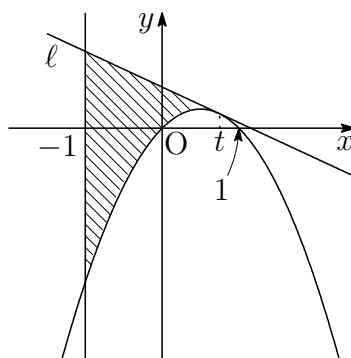
(*) の第 2 式から $(a-2)(2a-1) < 0$ すなわち $\frac{1}{2} < a < 2$

よって, 求める a の値の範囲は $\frac{1}{2} < a < 2$

(4) $a = 1$ のとき, $\textcircled{1}$ より $t = -1 + \sqrt{3}$

$f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) - (x-t)^2$ であるから, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^t \{f(t) + f'(t)(x-t) - f(x)\} dx = \int_{-1}^t (x-t)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[(x-t)^3 \right]_{-1}^t = \frac{1}{3}(1+t)^3 = \frac{1}{3}(1+\sqrt{3}-1)^3 = \sqrt{3} \end{aligned}$$



3 (1) 初項が1であるから $S_n = \frac{1}{2}n\{2 + (n-1)d\}$

d は自然数であるから, $S_n = 94$ のとき

$$\frac{1}{2}n\{2 + (n-1) \cdot 1\} \leq 94 \quad \text{ゆえに} \quad n(n+1) \leq 188$$

$$13 \cdot 14 = 182, \quad 14 \cdot 15 = 210 \quad \text{より} \quad 3 \leq n \leq 13$$

$$n\{2 + (n-1)d\} = 2^2 \cdot 47 \quad \text{より, これを満たす } n \text{ は } \quad \mathbf{n = 4}$$

$$\text{ゆえに} \quad 2 + 3d = 47 \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{d = 15}$$

(2) (1) と同様に, d は自然数であるから, $S_n = 98$ のとき

$$\frac{1}{2}n\{2 + (n-1) \cdot 1\} \leq 98 \quad \text{ゆえに} \quad n(n+1) \leq 196$$

$$13 \cdot 14 = 182, \quad 14 \cdot 15 = 210 \quad \text{より} \quad 3 \leq n \leq 13$$

$$(*) \quad n\{2 + (n-1)d\} = 2^2 \cdot 7^2 \quad \text{より, これを満たす } n \text{ は } \quad n = 4, 7$$

(i) $n = 4$ のとき, $(*)$ により

$$2 + 3d = 49 \quad \text{これをみたす自然数 } d \text{ は存在しない.}$$

(ii) $n = 7$ のとき, $(*)$ により

$$2 + 6d = 28 \quad \text{これをみたす自然数 } d \text{ は存在しない.}$$

(i), (ii) より, $S_n = 98$ となる n と d の組はない. ■