

平成 14 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分

文・法・経済・経営・国際文化・発達科学

(人間環境(文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・

医(保健(理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

- 1 数列 $\{a_n\}$ は、初項 a および公差 d が整数であるような等差数列であり、

$$\begin{cases} 8 \leq a_2 \leq 10 \\ 14 \leq a_4 \leq 16 \\ 19 \leq a_5 \leq 21 \end{cases}$$

をみたしているとする。このような数列 $\{a_n\}$ をすべて求めよ。

- 2 実数 t に対して、 xy 平面上の直線

$$(1 - t^2)x - 2ty = 1 + t^2$$

は、 t の値によらず円 C に接しているものとする。次の問に答えよ。

- (1) 円 C の方程式を求めよ。また、接点の座標を求めよ。
- (2) t が $t \geq 1$ の範囲を動くとき、直線の通過する範囲を図示せよ。

- 3 次の問に答えよ。

- (1) 方程式

$$x^2 + y^2 + ax + by + 3c = 0$$

が円を表すための a, b, c の条件を求めよ。

- (2) 一つのサイコロを 2 回振って出た目の数を、順に a, b とする。 $c = 1$ とするとき、 a, b の組が (1) の条件をみたす場合は何通りあるか。
- (3) 一つのサイコロを 3 回振って出た目の数を、順に a, b, c とする。 a, b, c が (1) の条件をみたす確率を求めよ。

解答例

1 (1) 条件から, p, q, r を整数とすると

$$(*) \begin{cases} a + d = 8 + p & (0 \leq p \leq 2) \\ a + 3d = 14 + q & (0 \leq q \leq 2) \\ a + 4d = 19 + r & (0 \leq r \leq 2) \end{cases}$$

(*) の第 1 式と第 2 式から

$$(**) \quad a = 5 + p + \frac{p - q}{2}, \quad d = 3 + \frac{q - p}{2}$$

これらを (*) の第 3 式に代入して整理すると

$$r = \frac{-p + 3q}{2} - 2$$

$$0 \leq r \leq 2 \text{ より } 4 \leq -p + 3q \leq 8 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$p = 0 \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ より } 4 \leq 3q \leq 8$$

$$(**) \text{ より, } p, q \text{ の偶奇が一致することに注意して } q = 2$$

$$p = 1 \text{ のとき, } (**) \text{ より, } p, q \text{ の偶奇が一致するから, } q = 1$$

これは, $\textcircled{1}$ を満たさないから不適

$$p = 2 \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ より } 6 \leq 3q \leq 10$$

$$(**) \text{ より, } p, q \text{ の偶奇が一致することに注意して } q = 2$$

$$(i) \sim (iii) \text{ を } (**) \text{ に代入すると } (a, d) = (4, 4), (7, 3)$$

したがって, 求める数列 $\{a_n\}$ は

$$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 4 = 4n \quad \text{または} \quad a_n = 7 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 4$$



- 2 (1) 直線 $(1 - t^2)x - 2ty = 1 + t^2$ に垂直な直線 (法線群)

$$2tx + (1 - t^2)y + A = 0 \quad (A \text{ は定数})$$

で, すべての t について通る点が C の中心であるから, これを t について整理すると

$$-yt^2 + 2xt + y - A = 0$$

これがすべての実数 t について成立するから

$$-y = 0, \quad 2x = 0, \quad y - A = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = 0, \quad y = 0, \quad A = 0$$

C の中心は原点で, 接点は, 次の 2 直線の交点であるから

$$\begin{cases} (1 - t^2)x - 2ty = 1 + t^2 \\ +2tx + (1 - t^2)y = 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, -\frac{2t}{1 + t^2} \right)$$

円 C の半径を r とすると

$$r^2 = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)^2 + \left(-\frac{2t}{1 + t^2} \right)^2 = 1$$

よって, C の方程式は $x^2 + y^2 = 1$

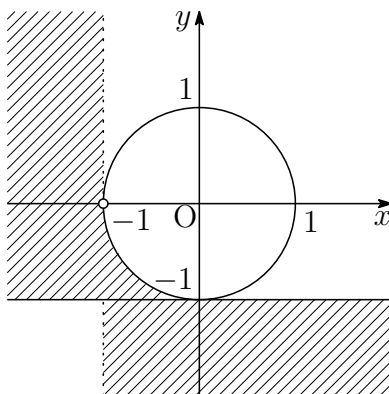
- (2) $t \geq 1$ より, (1) の結果に $t = \tan \theta$ を代入すると $\left(\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right)$

$$(\cos 2\theta, -\sin 2\theta) \quad \text{ゆえに} \quad (\cos(-2\theta), \sin(-2\theta))$$

$-\pi < -2\theta \leq -\frac{\pi}{2}$ であるから, 直線は

$$x \cos(-2\theta) + y \sin(-2\theta) = 1$$

この直線が通過する領域は, 図の斜線部分で点線および $\circ$ は含まない.



- 3** (1) $x^2 + y^2 + ax + by + 3c = 0$ より

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - 3c$$

これが円を表すから

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - 3c > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + b^2 > 12c$$

- (2) $c = 1$ のとき, $a^2 + b^2 > 12$ より, これをみたす (a, b) の組は下の表から

30 (通り)

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	2	5	10	17	26	37
2	5	8	13	20	29	40
3	10	13	18	25	34	45
4	17	20	25	32	41	52
5	26	29	34	41	50	61
6	37	40	45	52	61	72

- (3) 上の表から

$c = 2$ のとき, $a^2 + b^2 > 24$ より 23 (通り)

$c = 3$ のとき, $a^2 + b^2 > 36$ より 14 (通り)

$c = 4$ のとき, $a^2 + b^2 > 48$ より 6 (通り)

$c = 5$ のとき, $a^2 + b^2 > 60$ より 3 (通り)

$c = 6$ のとき, $a^2 + b^2 > 72$ より 0 (通り)

これと (2) の結果から, 求める確率は

$$\frac{30 + 23 + 14 + 6 + 3 + 0}{6^3} = \frac{76}{6^3} = \frac{19}{54}$$

