

平成 13 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分

文・法・経済・経営・国際文化・発達科学

(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・

医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

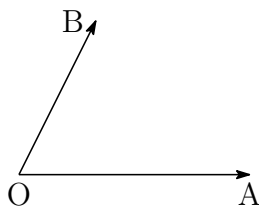
問題 1 2 3

1 次の問に答えよ.

- (1) $1+i$ および $1+\sqrt{3}i$ を極形式であらわせ. ただし, i は虚数単位である.
- (2) 正の整数 m, n が $|(1+i)^n| = |(1+\sqrt{3}i)^m|$ をみたすとき, m, n の関係式を求めよ.
- (3) 正の整数 m, n で $(1+i)^n = (1+\sqrt{3}i)^m$ かつ $m+n \leq 100$ をみたす組 (m, n) をすべて求めよ.

2 3 点 O, A, B は, 一直線上にない点とし, $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ とする. また, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく. このとき次の問に答えよ.

- (1) 点 P を $\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BC}$ (t は実数) をみたす点とする. このとき, $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}, t$ であらわせ.
- (2) 点 Q を $\overrightarrow{OQ} = 2s\overrightarrow{OA}$ (s は実数) をみたす点とする. P と Q の中点を M とする. t, s が $0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1$ をみたしながら変化するとき, 点 M の存在する範囲を図示せよ.



3 a を正の定数として, 関数

$$f(x) = (x-1)\{4x^2 - (6a-4)x + 12a-11\}$$

を考える. 次の問に答えよ.

- (1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.
- (2) $f'(x) \geq 0$ が区間 $0 \leq x \leq 2$ でなりたつとき, a のとり得る値の範囲を求めよ.
- (3) (2) のとき, 区間 $0 \leq x \leq 2$ における $|f(x)|$ の最大値を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad 1+\sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$(2) \quad |(1+i)^n| = (\sqrt{2})^n = 2^{\frac{n}{2}}, \quad |(1+\sqrt{3}i)^m| = 2^m$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{n}{2} = m \quad \text{よって} \quad n = 2m$$

$$(3) \quad (2) \text{の結果から} \quad m+n \leq 100 \quad \text{ゆえに} \quad m \leq \frac{100}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\arg(1+i)^n = n \arg(1+i) = n \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{n}{4}\pi = \frac{m}{2}\pi$$

$$\arg(1+\sqrt{3}i)^m = m \arg(1+\sqrt{3}i) = m \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{m}{3}\pi$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{m}{2}\pi - \frac{m}{3}\pi = \frac{m}{6}\pi = \frac{m}{12} \cdot 2\pi$$

$$\textcircled{1} \text{より, 整数 } m \text{ は } m = 12, 24$$

$$(2) \text{の結果から} \quad (m, n) = (12, 24), (24, 48)$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = 2\vec{a} + 3\vec{b}, \quad \overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BC} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = t(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$$

$$\overrightarrow{OP} = \vec{b} + t(2\vec{a} + 2\vec{b})$$

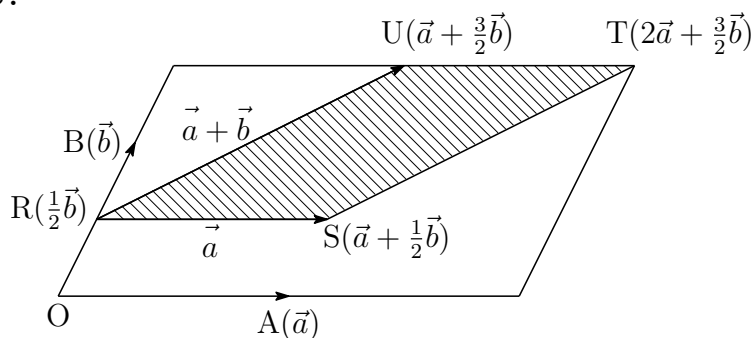
$$= 2t\vec{a} + (2t+1)\vec{b}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} = 2s\overrightarrow{OA} = 2s\vec{a} \text{ について, 2点 P, Q の中点 M は}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\{2t\vec{a} + (2t+1)\vec{b}\} + \frac{1}{2} \cdot 2s\vec{a}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{b} + s\vec{a} + t(\vec{a} + \vec{b})$$

$0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ であるから, 点 M の存在する範囲は, 下の図の斜線部分である.



- 3** (1) $f(x) = (x-1)\{4x^2 - (6a-4)x + 12a-11\}$ より

$$f(x) = 4x^3 - 6ax^2 + (18a-15)x - 12a + 11$$

したがって $f'(x) = 12x^2 - 12ax + 18a - 15$

- (2) (1) の結果から $f'(x) = 12\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - 3a^2 + 18a - 15$

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq x \leq 2} f'(x) &= \begin{cases} f'\left(\frac{a}{2}\right) & \left(0 < \frac{a}{2} \leq 2\right) \\ f'(2) & \left(2 \leq \frac{a}{2}\right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -3a^2 + 18a - 15 & (0 < a \leq 4) \\ -6a + 33 & (4 \leq a) \end{cases} \end{aligned}$$

- (i) $0 < a \leq 4$ のとき, $-3a^2 + 18a - 15 \geq 0$ より

$$(a-1)(a-5) \leq 0 \quad \text{したがって} \quad 1 < a \leq 4$$

- (ii) $4 \leq a$ のとき, $-6a + 33 \geq 0$ より $4 \leq a \leq \frac{11}{2}$

(i), (ii) より $1 \leq a \leq \frac{11}{2}$

- (3) (2) の結果から, $f(x)$ は $0 \leq x \leq 2$ において単調増加
 $f(1) = 0$ であることに注意すると, $1 \leq a \leq \frac{11}{2}$ において

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 2} |f(x)| &= \max\{f(2), -f(0)\} = \max(13, 12a-11) \\ &= \begin{cases} 13 & (1 \leq a \leq 2) \\ 12a-11 & \left(2 \leq a \leq \frac{11}{2}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

