

平成23年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・医・歯・薬・教育(自然系・理数系)・
総合学科(理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

1 実数 a, b に対して, 2次正方行列 A と列ベクトル B を

$$A = \begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1+a & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix}$$

と定め, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. 等式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

により, 座標平面上の点 $P(x, y)$ に対し点 $P'(x', y')$ が定まるものとする. 次の問いに答えよ.

- (1) $a = b = -1$ のとき, 点 $P'(3, 2)$ となる点 $P(x, y)$ を求めよ.
- (2) $A^2 = kE$ (k は実数) を満たすとき, a, k の値を求めよ.
- (3) どんな点 P に対しても点 P' が原点 O に一致しないための a, b の条件を求めよ.

2 次の問いに答えよ.

- (1) $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ.
- (2) p, q を異なる自然数とすると, $p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ.
- (3) $\log_2 3$ の値の小数第1位を求めよ.

3 次の問いに答えよ.

(1) a, b, c を定数とする. 関数 $f(x) = a \cos^2 x + 2b \cos x \sin x + c \sin^2 x$ が定数となるための a, b, c の条件を求めよ.

(2) 関数

$$g(x) = 4 \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x - \frac{5}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$$

が最大値をとる x の値を θ とする. $\cos 2\theta, \sin 2\theta$ の値を求めよ.

(3) (2) の関数 $g(x)$ と θ に対して, 定積分 $\int_0^\theta g(x) dx$ を求めよ.

4 平面上で, 線分 AB を $1:2$ に内分する点を O とし, O を中心とする半径 OB の円を S , 円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする. 点 P は円 S の内部にあり, 線分 BC 上にないものとする. 円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする. $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$, $\angle APB = \theta$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{OB}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ.

(2) 点 P が円 S の内部にあることを用いて, $\cos \theta < \frac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ.

(3) PQ の長さを $|\vec{a}|, |\vec{b}|, \theta$ で表せ.

(4) $PA = 3, PB = 2$ とする. $\triangle QAB = 3\triangle POB$ を満たすとき, $\triangle PAB$ の面積を求めよ.

5 $\triangle ABC$ の頂点は反時計回りに A, B, C の順に並んでいるとする. 点 A を出発した石が, 次の規則で動くとする.

コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り, 裏が出たときは動かない. コインを投げて表と裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする.

コインを n 回投げたとき, 石が点 A, B, C にある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする. 次の問いに答えよ.

(1) a_1, b_1, c_1 の値を求めよ.

(2) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n で表せ. また, a_2, b_2, c_2 および a_3, b_3, c_3 の値を求めよ.

(3) a_n, b_n, c_n のうち 2 つの値が一致することを証明せよ.

(4) (3) において一致する値を p_n とするとき, p_n を n で表せ.

解答例

1 (1) $a = b = -1$ のとき, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ゆえに $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

したがって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

よって $\mathbf{P} \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$

(2) ハミルトン・ケリーの定理により $A^2 - (a+2)A + (a^2 + a - 2)E = O$
これに $A^2 = kE$ を代入すると

$$\begin{aligned} kE - (a+2)A + (a^2 + a - 2)E &= O \\ (a+2)A &= (k + a^2 + a - 2)E \end{aligned}$$

$a+2=0$ のとき, $k + a^2 + a - 2 = 0$ であるから $a = -2$, $k = 0$

$a+2 \neq 0$ のとき, A は E のスカラー倍となり, A に反する.

よって $\mathbf{a} = -2, \mathbf{k} = 0$

(3) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく. A が正則であるとき, $X = -A^{-1}B$ とすると, 点 P' が原点に一致する.

したがって, $\det A = 0$ は求める条件の必要条件である.

$\det A = 0$ より $a^2 + a - 2 = 0$ これを解いて $a = -2, 1$

(i) $a = -2$ のとき

$$\begin{aligned} AX + B &= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix} \\ &= (-x + 2y + b) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$-x + 2y + b = 0$ をみたす点 $P(x, y)$ をとると点 P' が原点に一致する.

(ii) $a = 1$ のとき

$$\begin{aligned} AX + B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix} \\ &= (x + y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$b \neq 0$ のとき、点 P' は原点 O に一致しない。

(i), (ii) より $\mathbf{a} = \mathbf{1}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ■

2 (1) $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ より $2^{\frac{m}{n}} = 3$ ゆえに $2^m = 3^n$

m, n は、自然数であるから、上式は素因数分解の一意性に反する。

よって、 $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しない。

補足 自然数 m, n に対し、 $2^m = 3^n$ の左辺は偶数、右辺は奇数であるから矛盾。

(2) $p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分が等しくなる自然数 p, q に対し ($p \neq q$)

$$p \log_2 3 - q \log_2 3$$

は整数であるから、これを l とすると

$$(p - q) \log_2 3 = l \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 3 = \frac{l}{p - q}$$

これは (1) の結果に反するので、 $p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分が等しくなる自然数 p, q ($p \neq q$) は存在しない。

(3) $8 < 9, 243 < 256$, すなわち、 $2^3 < 3^2, 3^5 < 2^8$ ゆえに $2^{\frac{3}{2}} < 3 < 2^{\frac{8}{5}}$

したがって $\frac{3}{2} < \log_2 3 < \frac{8}{5}$ すなわち $1.5 < \log_2 3 < 1.6$

よって、 $\log_2 3$ の小数第 1 位は **5**

補足 $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ ということを知っていれば

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

を計算することで、 $1.5 < \log_2 3 < 1.6$ を評価すればよいことが分かる。 ■

- 3** (1) $f(x) = a \cos^2 x + 2b \cos x \sin x + c \sin^2 x$
 $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ より $a = c$ ゆえに $f(x) = c + b \sin 2x$
 $f(x)$ は, 定数であるから $b = 0$ よって $\mathbf{a = c, b = 0}$

$$\begin{aligned} (2) \quad g(x) &= 4 \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x - \frac{5}{2} \\ &= 4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + \sin 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{5}{2} \\ &= \sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{13}}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \cos 2x + \frac{2}{\sqrt{13}} \sin 2x \right) \end{aligned}$$

$$\cos 2\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \sin 2\theta = \frac{2}{\sqrt{13}} \text{ とおくと } (0 < \theta < \frac{\pi}{4})$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\sqrt{13}}{2} (\cos 2x \cos 2\theta + \sin 2x \sin 2\theta) \\ &= \frac{\sqrt{13}}{2} \cos 2(x - \theta) \end{aligned}$$

上式より, $x = \theta$ で $g(x)$ は最大となる.

$$\text{よって } \cos 2\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \sin 2\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

- (3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \int_0^\theta g(x) dx &= \int_0^\theta \frac{\sqrt{13}}{2} \cos 2(x - \theta) dx \\ &= \frac{\sqrt{13}}{4} \left[\sin 2(x - \theta) \right]_0^\theta \\ &= \frac{\sqrt{13}}{4} \sin 2\theta = \frac{\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

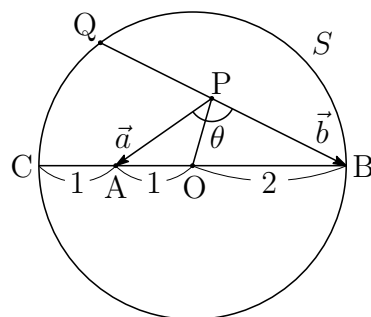
- 4** (1) O は線分 AB を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{PO} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

C は線分 AB を 1 : 4 に外分する点であるから

$$\overrightarrow{PC} = \frac{-4\vec{a} + \vec{b}}{1 - 4} = \frac{4\vec{a} - \vec{b}}{3}$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{-2\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$$



(2) $|\overrightarrow{PO}| < |\overrightarrow{OB}|$ であるから, $|2\vec{a} + \vec{b}| < |-2\vec{a} + 2\vec{b}|$ より

$$|2\vec{a} + \vec{b}|^2 < |-2\vec{a} + 2\vec{b}|^2 \quad \text{整理すると} \quad 4\vec{a} \cdot \vec{b} < |\vec{b}|^2$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ であるから

$$4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta < |\vec{b}|^2 \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta < \frac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$$

別解 $\angle CPB$ は鈍角であるから, $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB} < 0$ より

$$\frac{1}{3}(4\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} < 0 \quad \text{整理すると} \quad 4\vec{a} \cdot \vec{b} < |\vec{b}|^2$$

(3) $\overrightarrow{PQ} = -k\vec{b}$ とおくと ($k > 0$)

$$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PQ} = \frac{4\vec{a} - \vec{b}}{3} - (-k\vec{b}) = \frac{1}{3}\{4\vec{a} + (3k - 1)\vec{b}\}$$

$\overrightarrow{QC} \perp \overrightarrow{PB}$ であるから, $\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ より

$$\frac{1}{3}\{4\vec{a} + (3k - 1)\vec{b}\} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + (3k - 1)|\vec{b}|^2 = 0$$

$$k \text{ について解くと} \quad k = \frac{|\vec{b}| - 4|\vec{a}|\cos\theta}{3|\vec{b}|}$$

$$\text{よって} \quad PQ = |\overrightarrow{PQ}| = k|\vec{b}| = \frac{1}{3}(|\vec{b}| - 4|\vec{a}|\cos\theta)$$

別解 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BP} = |\overrightarrow{BQ}||\overrightarrow{BP}|$ であるから

$$\frac{4}{3}(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (-\vec{b}) = BQ|\vec{b}| \quad \text{ゆえに} \quad BQ = \frac{4}{3}(|\vec{b}| - |\vec{a}|\cos\theta)$$

$$\text{よって} \quad PQ = BQ - BP = \frac{4}{3}(|\vec{b}| - |\vec{a}|\cos\theta) - |\vec{b}| = \frac{1}{3}(|\vec{b}| - 4|\vec{a}|\cos\theta)$$

(4) $\triangle QAB = 3\triangle POB$ より $BQ \cdot BA = 3BP \cdot BO$

$$BA = \frac{3}{2}BO \text{ であるから} \quad BQ = 2BP \quad \text{ゆえに} \quad PQ = PB = |\vec{b}| = 2$$

これと $|\vec{a}| = PA = 3$ を (3) の結果に代入すると

$$2 = \frac{1}{3}(2 - 4 \cdot 3 \cos\theta) \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta = -\frac{1}{3}$$

$$\sin\theta > 0 \text{ であるから} \quad \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{よって} \quad \triangle PAB = \frac{1}{2}PA \cdot PB \sin\theta = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$

■

- 5 (1) コインを1回投げたとき、石は点Aまたは点Bにあり、その確率はともに $\frac{1}{2}$ であるから

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = 0$$

- (2) 与えられた規則により

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n) \end{cases}$$

- (1) の結果を上を漸化式に順次適用すると

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + c_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{1}{4}$$

$$b_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(b_1 + c_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + c_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

$$b_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8}$$

$$c_3 = \frac{1}{2}(b_2 + c_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8}$$

- (3) 数学的帰納法により示す.

[1] $a_1 = b_1$ であるから, $n = 1$ のとき成立する.

[2] $n = k$ のとき, a_k, b_k, c_k のうち2つの値が一致すると仮定すると, (2) で求めた漸化式から

$$a_{k+1} - b_{k+1} = -\frac{1}{2}(b_k - c_k)$$

$$b_{k+1} - c_{k+1} = -\frac{1}{2}(c_k - a_k)$$

$$c_{k+1} - a_{k+1} = -\frac{1}{2}(a_k - b_k)$$

が成立するから, $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}$ のうち2つの値が一致する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, a_n, b_n, c_n のうち2つの値が一致する.

- (4) $a_n + b_n + c_n = 1$ であるから，一致する 2 つの値が p_n であるとき，残りの 1 つは $1 - 2p_n$ である．3 つの値 $p_n, p_n, 1 - 2p_n$ を (2) の漸化式に適用することにより

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}\{p_n + (1 - 2p_n)\} \quad \text{ゆえに} \quad p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{p_n - \frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad p_n = \frac{1}{3} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

