

平成19年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・医・歯・薬・教育(自然系・理数系)・
総合学科(理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

- 1 a, b, c, d は $a+c=b+d=1$ を満たす正の定数とし、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える．さらに、 $x_1+y_1=1$ を満たす実数 x_1, y_1 に対し、 x_n, y_n ($n=2, 3, 4, \dots$) を漸化式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

によって帰納的に定める．このとき、次の問いに答えよ．

- (1) $x_n + y_n = 1$ ($n=1, 2, 3, \dots$)であることを示せ．
 - (2) x_n をまず a, b, x_{n-1} で表し、次に a, b, x_1 で表せ．
※ x_n を表すとき、必要ならば n も使ってよい．
 - (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ．
- 2 座標空間の2点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$ および
- $$\vec{u} = (-1, 2, 5), \quad \vec{v} = (1, 1, 1), \quad \vec{w} = (-1, 3, 1)$$
- と成分表示される3つのベクトルがある．次の問いに答えよ．
- (1) $\overrightarrow{AP}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{BP}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ．
 - (2) 上で求めた点 P に対し、 $\overrightarrow{CP}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 $C(0, 0, c)$ を求めよ．
 - (3) 上で求めた点 P と C に対し、 P は3点 A, B, C の定める平面上にあることを示せ．

3 $f(x) = \frac{8x+21}{3x+8}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$ であることを示せ.

(2) $x \geq 0$ ならば $f(x) \geq 2$ であることを示せ.

(3) $x \geq 2, y \geq 2$ ならば

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{100}$$

となることを示せ.

(4) $x \geq 2$ ならば

$$|f(f(x)) - \sqrt{7}| \leq \frac{|x - \sqrt{7}|}{10000}$$

となることを示し, これを用いて $|r - \sqrt{7}| < 10^{-4}$ を満たす有理数 r を 1 つ求めよ.

4 $0 < b < a$ を満たす定数 a, b に対し, 2つの楕円

$$A: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad B: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

を考える. また α, β は

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

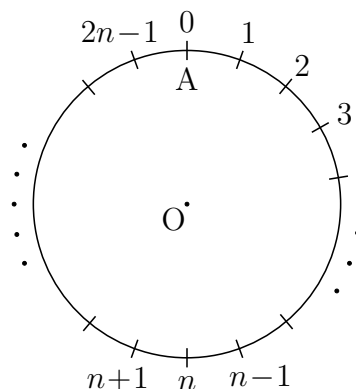
を満たす 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間の実数とする. 次の問いに答えよ.

(1) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ を示せ.

(2) 2つの楕円 A, B の第1象限にある交点の座標を求めよ.

(3) 楕円 A で囲まれる図形と楕円 B で囲まれる図形の共通部分のうち, $x \geq 0, y \geq 0$ の範囲にある部分の面積 S を a, b, β を用いて表せ.

- 5 n を 2 以上の整数とする．中心を O とする円の周を $2n$ 等分して，図のように 0 から $2n-1$ までの目盛りを付ける．目盛りが 0 の点を A とする．一方，袋の中に 1 から $2n-1$ までの整数を書いた玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている．この袋から玉を 2 つ取り出して，玉に書かれた数と同じ目盛りを持つ 2 点をとる．2 点のうち，目盛りの大きい方を B ，目盛りの小さい方を C とし， $\triangle ABC$ を考える．次の問いに答えよ．



- (1) 辺 BC 上に点 O がある場合は何通りあるか．
- (2) $\triangle ABC$ の辺上に点 O がある確率を求めよ．
- (3) $\triangle ABC$ の内部に点 O がある確率は $\frac{n-2}{2(2n-1)}$ であることを示せ．
- (4) $\triangle ABC$ の辺上に点 O があるとき $X = 1$ ， $\triangle ABC$ の内部に点 O があるとき $X = 2$ ，それ以外るとき $X = 0$ とする． X の期待値を求めよ．

解答例

1 (1) 与えられた漸化式から

$$(*) \quad x_n = ax_{n-1} + by_{n-1}, \quad y_n = cx_{n-1} + dy_{n-1}$$

上の2式の辺々を加えると

$$x_n + y_n = (a + c)x_{n-1} + (b + d)y_{n-1}$$

$$a + c = b + d = 1 \text{ より } x_n + y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$$

$$x_1 + y_1 = 1 \text{ であるから, 上式より } x_n + y_n = 1$$

(2) (1)の結果から, $y_{n-1} = 1 - x_{n-1}$ を $(*)$ の第1式に代入すると

$$x_n = ax_{n-1} + b(1 - x_{n-1}) \quad \text{ゆえに} \quad x_n = (a - b)x_{n-1} + b \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$t = (a - b)t + b \cdots \textcircled{2} \text{ とすると } (1 - a + b)t = b$$

ここで, $a + c = 1$ より, $1 - a = c$ であるから

$$1 - a + b = c + b \neq 0 \quad (b, c > 0) \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{b}{1 - a + b}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } x_n - t = (a - b)(x_{n-1} - t) \quad \text{ゆえに} \quad x_n - t = (x_1 - t)(a - b)^{n-1}$$

$$\text{よって} \quad x_n = t + (x_1 - t)(a - b)^{n-1}$$

$$= \frac{b}{1 - a + b} + \left(x_1 - \frac{b}{1 - a + b} \right) (a - b)^{n-1}$$

(3) $a > 0, b > 0, c = 1 - a > 0, d = 1 - b > 0$ より $0 < a < 1, 0 < b < 1$

$$\text{ゆえに} \quad -1 < a - b < 1 \quad \text{よって, (2)の結果から} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b}{1 - a + b}$$



- 2** (1) $P(x, y, z)$ とすると, $A(2, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$ より

$$\overrightarrow{AP} = (x-2, y, z), \quad \overrightarrow{BP} = (x, y+1, z)$$

$$\overrightarrow{AP} // \vec{u}, \quad \overrightarrow{BP} // \vec{v} \text{ より, } \overrightarrow{AP} = s\vec{u}, \quad \overrightarrow{BP} = t\vec{v} \text{ とおくと } (s, t \text{ は実数})$$

$$(x-2, y, z) = s(-1, 2, 5), \quad (x, y+1, z) = t(1, 1, 1)$$

$$\text{したがって } x = 2 - s = t, \quad y = 2s = -1 + t, \quad z = 5s = t$$

$$\text{上の第1式と第2式を連立すると } s = \frac{1}{3}, \quad t = \frac{5}{3}$$

$$\text{これは, 第3式の } s, t \text{ を満たす. よって } P\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$(2) C(0, 0, c), P\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) \text{ より } \overrightarrow{CP} = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3} - c\right)$$

$$\vec{w} = (-1, 3, 1) \text{ に対して, } \overrightarrow{CP} \perp \vec{w} \text{ であるから, } \overrightarrow{CP} \cdot \vec{w} = 0 \text{ より}$$

$$-1 \cdot \frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} + 1 \left(\frac{5}{3} - c \right) = 0 \quad \text{これを解いて } c = 2$$

$$\text{よって } C(0, 0, 2)$$

$$(3) (2) \text{ の結果から } \overrightarrow{CP} = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{CA} = (2, 0, -2), \quad \overrightarrow{CB} = (0, -1, -2) \text{ より } \overrightarrow{CP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$$

よって, P は 3 点 A, B, C の定める平面上にある.

発展 3 点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1 \quad \text{すなわち } x - 2y + z - 2 = 0 \quad \cdots (*)$$

点 $P\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ は, $(*)$ を満たすので, 点 P は平面 ABC 上にある. ■

- 3** (1) $a = \sqrt{7}$ とおくと, $21 = 3a^2$ より, $f(x) = \frac{8x + 3a^2}{3x + 8}$ であるから

$$f(a) = \frac{8a + 3a^2}{3a + 8} = \frac{a(3a + 8)}{3a + 8} = a \quad \text{よって} \quad f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$$

- (2) $x \geq 0$ のとき

$$f(x) - 2 = \frac{8x + 21}{3x + 8} - 2 = \frac{2x + 5}{3x + 8} \geq 0 \quad \text{よって} \quad f(x) \geq 2$$

$$\begin{aligned} (3) \quad f(x) - f(y) &= \frac{8x + 21}{3x + 8} - \frac{8y + 21}{3y + 8} \\ &= \frac{(8x + 21)(3y + 8) - (8y + 21)(3x + 8)}{(3x + 8)(3y + 8)} \\ &= \frac{x - y}{(3x + 8)(3y + 8)} \end{aligned}$$

- $x \geq 2, y \geq 2$ のとき

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x - y|}{(3x + 8)(3y + 8)} \leq \frac{|x - y|}{(3 \cdot 2 + 8)^2} \leq \frac{|x - y|}{100}$$

- (4) $f(a) = a$ より, $f(f(a)) = f(a) = a$ であるから, $x \geq 2$ のとき

$$|f(f(x)) - f(f(a))| \leq \frac{|f(x) - f(a)|}{100}, \quad |f(x) - f(a)| \leq \frac{|x - a|}{100}$$

$$\text{上の 2 式から} \quad |f(f(x)) - f(f(a))| \leq \frac{|x - a|}{10000}$$

$$\text{したがって} \quad |f(f(x)) - \sqrt{7}| \leq \frac{|x - \sqrt{7}|}{10000}$$

$$\text{上式に } x = 2 \text{ を代入すると } |f(f(2)) - \sqrt{7}| \leq \frac{|2 - \sqrt{7}|}{10000} < 10^{-4}$$

$|r - \sqrt{7}| < 10^{-4}$ を満たす有理数 r の一つは $f(f(2))$ である.

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{8 \cdot 2 + 21}{3 \cdot 2 + 8} = \frac{37}{14} \\ f\left(\frac{37}{14}\right) &= \frac{8 \cdot \frac{37}{14} + 21}{3 \cdot \frac{37}{14} + 8} = \frac{8 \cdot 37 + 21 \cdot 14}{3 \cdot 37 + 8 \cdot 14} = \frac{590}{223} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad r = f(f(2)) = \frac{590}{223}$$

■

4 (1) $0 < b < a$, $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ より $(0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2})$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

したがって $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 0$

$0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

(2) 2つの楕円の方程式の辺々を引くと ($0 < b < a$)

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)(x^2 - y^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x + y)(x - y) = 0$$

楕円 A , B の第1象限の交点であるから, $y = x > 0$ を A に代入して

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

よって, 交点の座標は $\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

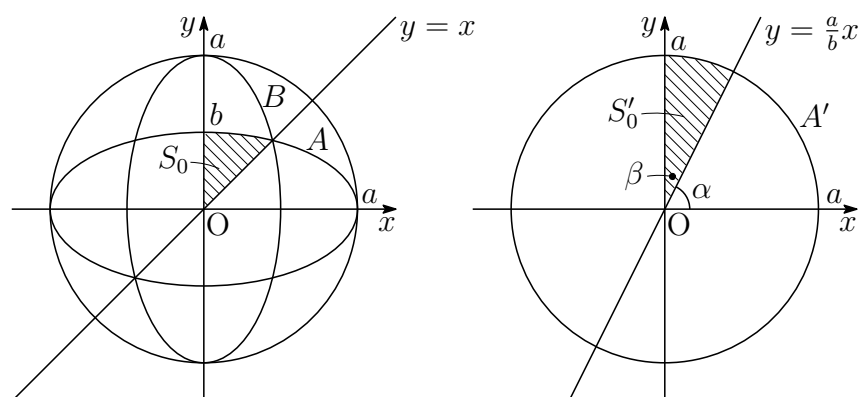
(3) 求める図形の面積で, $l: y = x$ の上側の部分の面積を S_0 とする.

A および l を x 軸を元に y 軸方向に $\frac{a}{b}$ 倍だけ拡大したものは

$$A': x^2 + y^2 = a^2, \quad l': y = \frac{a}{b}x$$

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b}$ より, l と x 軸とのなす角 (偏角) は α である.

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ より, 右下の図の斜線部分の面積 S'_0 は $S'_0 = \frac{1}{2}a^2\beta$



$S = 2S_0$, $S_0 = \frac{b}{a}S'_0$ であるから $S = 2 \cdot \frac{b}{a}S'_0 = 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}a^2\beta = ab\beta$

別解 曲線 A は次のように媒介変数表示ができる.

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

A と B の第 1 象限の交点が $(a \cos \alpha, b \sin \alpha)$ であるから, ガウス・グリーンの定理を用いて S_0 を求めることができる.

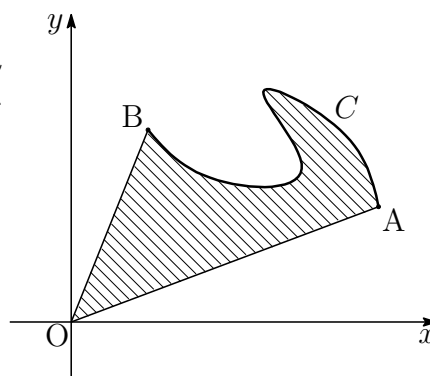
$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (xy' - x'y) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \{a \cos \theta (b \sin \theta)' - (a \cos \theta)' b \sin \theta\} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} ab d\theta = \frac{1}{2} ab \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{1}{2} ab \beta \end{aligned}$$

よって $S = 2S_0 = ab\beta$

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C: x = f(t), y = g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) について, $t = \alpha, \beta$ に対応する点をそれぞれ A, B とする. C と直線 OA, OB で囲まれた部分の面積を S とすると (OB の偏角 $>$ OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} dt$$



- 5** (1) B, C の目盛りをそれぞれ b, c とすると, 条件を満たすのは

$$b = n + k, \quad c = k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad \text{よって} \quad n-1 \text{ (通り)}$$

- (2) (i) 辺 AC 上に点 O があるとき, 次の $n-1$ 通り

$$b = n + k, \quad c = n \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

- (ii) 辺 AB 上に点 O があるとき, 次の $n-1$ 通り

$$b = n, \quad c = k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

- (1) および (i), (ii) から, $\triangle ABC$ 上に点 O がある場合の総数は

$$(n-1) + (n-1) + (n-1) = 3(n-1)$$

$$\text{よって, 求める確率は} \quad \frac{3(n-1)}{{}_{2n-1}C_2} = \frac{3(n-1)}{\frac{1}{2}(2n-1)(2n-2)} = \frac{3}{2n-1}$$

- (3) $c = 1$ のとき, なし.

$c = 2$ のとき, $b = n+1$ の 1 個

$c = 3$ のとき, $b = n+1, n+2$ の 2 個

$\vdots$

$c = n-1$ のとき, $b = n+1, n+2, \dots, 2n-2$ の $n-2$ 個

したがって, $\triangle ABC$ の内部に点 O がある場合の総数は

$$1 + 2 + \dots + (n-2) = \frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

よって, その確率は

$$\frac{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)}{{}_{2n-1}C_2} = \frac{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)}{\frac{1}{2}(2n-1)(2n-2)} = \frac{n-2}{2(2n-1)}$$

- (4) (2), (3) の結果から $P(X=1) = \frac{3}{2n-1}, \quad P(X=2) = \frac{n-2}{2(2n-1)}$

よって $E(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2)$

$$= 0 + 1 \cdot \frac{3}{2n-1} + 2 \cdot \frac{n-2}{2(2n-1)} = \frac{n+1}{2n-1}$$

