

平成 16 年度 広島大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

1 複素数平面上で不等式

$$2|z - 2| \leq |z - 5| \leq |z + 1|$$

を満たす点 z が描く図形を D とする.

- (1) D を図示せよ.
- (2) 点 z が D 上を動くものとする. $\arg z = \theta$ とするとき, $\tan \theta$ の値のとりうる範囲を求めよ.
- (3) D の面積を求めよ.

2 次の問いに答えよ.

- (1) 点 $(3, 3)$ における円 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ の接線の方程式を求めよ.
- (2) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) \geq \log_{\frac{1}{2}} y \\ \log_2(x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5) \leq \log_2 5 \end{cases}$$

- (3) a を正の数とする. 点 (x, y) が (2) で求めた領域を動くとき, $ax + y$ の最大値が 4 になるように a の値を定めよ.

3 X, Y はともに実数を成分とする 2 次の正方行列で

$$\begin{cases} 2X - Y = E \\ XY = O \end{cases}$$

を満たしているものとする. ただし, E, O は, それぞれ 2 次の単位行列, 零行列とする. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

- (1) X が逆行列をもつとき, X, Y を求めよ.
- (2) X が逆行列をもたないとき, $(2a + 2d - 1)X$ を求めよ.
- (3) X は零行列でなく, かつ X が逆行列をもたないとき, a と d を b, c で表せ. ただし, b, c は $bc \leq \frac{1}{16}$ を満たすものとする.

- 4 A を正の定数, θ は $0 \leq \theta \leq \pi$ を満たす実数とし, 2つの曲線

$$y = A \cos x, \quad y = \sin(x - \theta) \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

によって囲まれた図形の面積を S とする. また, この2つの曲線の交点の x 座標を a, b ($a < b$) とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\cos b \sin(a - \theta) = \cos a \sin(b - \theta)$ が成り立っているとき,

$$\cos \theta \sin(b - a) = 0$$

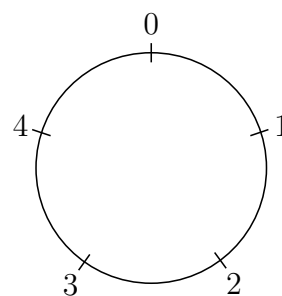
を示せ.

- (2) $b - a = \pi$ を示せ.
 (3) S を A, a, θ を用いて表せ.
 (4) S^2 を A, θ を用いて表せ.
 (5) S を最大にする θ の値およびそのときの S の値を求めよ.

- 5 円周を5等分して図のように0から4の目盛りをふる. 初めに点Pを目盛り0の位置に置く. 硬貨を1回投げるときに,

表が出れば, 点Pを右回りに2目盛り動かし,
 裏が出れば, 点Pを左回りに1目盛り動かす

という操作を繰り返し行う. 硬貨を n 回投げたあと, 点Pが目盛り i の位置にある確率を $p_n(i)$ と表す.



- (1) $p_2(1), p_3(2), p_3(3)$ を求めよ.
 (2) 硬貨を4回投げて, 点Pがはじめて目盛り2の位置で止まる確率を求めよ.
 (3) $p_{n+1}(0) = \frac{1}{2}\{p_n(3) + p_n(1)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ.
 (4) z を $z^5 = 1$ を満たす複素数とする. すべての自然数 n に対して,

$$\sum_{i=0}^4 p_n(i) z^i = \frac{(z^2 + z^{-1})^n}{2^n}$$

が成り立つことを示せ.

解答例

1 (1) $2|z-2| \leq |z-5|$ より

$$4(z-2)(\bar{z}-2) \leq (z-5)(\bar{z}-5)$$

ゆえに $|z-1|^2 \leq 4$

すなわち $|z-1| \leq 2 \quad \dots \textcircled{1}$

$|z-5| \leq |z+1|$ より

$$(z-5)(\bar{z}-5) \leq (z+1)(\bar{z}+1)$$

ゆえに $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \geq 2 \quad \dots \textcircled{2}$

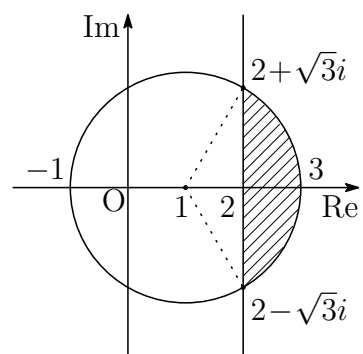
D は、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ を同時に満たす図の斜線部分の領域で境界線を含む。

(2) (1) の図から $\arg(2-\sqrt{3}i) \leq \theta \leq \arg(2+\sqrt{3}i)$

したがって $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \tan \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) (1) の図から求める斜線部分の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$



■

- 2** (1) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ より, $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ とおく.

C 上の点 $(3, 3)$ における接線の方程式は

$$(3-2)(x-2) + (3-1)(y-1) = 5$$

よって $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

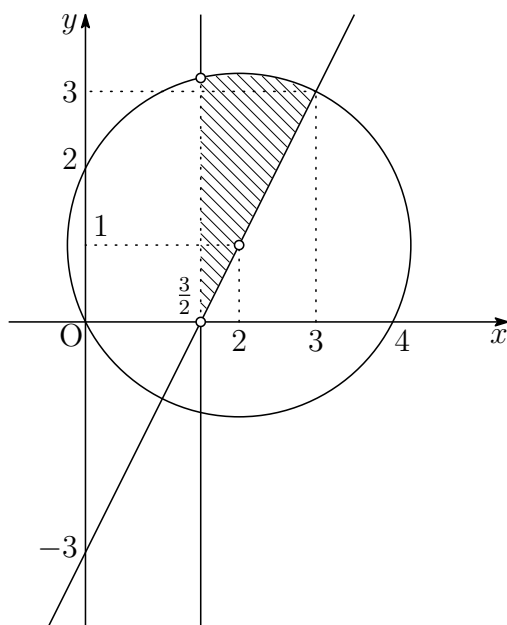
- (2) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} y$ より $0 < 2x-3 \leq y$

ゆえに $y \geq 2x-3 \left(x > \frac{3}{2}\right) \dots \textcircled{1}$

$\log_2(x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5) \leq \log_2 5$ より

$$0 < x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 \leq 5$$

ゆえに $0 < (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 5 \dots \textcircled{2}$



- (3) C 上の点 $(2, 1 + \sqrt{5})$ における接線 ℓ_0 の y 切片は $1 + \sqrt{5}$, (1) で求めた接線 ℓ_1 の y 切片は $\frac{9}{2}$, 直線 $\ell: ax + y = 4$ の y 切片は 4 である. $1 + \sqrt{5} < 4 < \frac{9}{2}$ であるから, $ax + y$ の最大値が 4 となるとき, 直線 ℓ は C の接線である. このとき, ℓ_1, ℓ, ℓ_0 のそれぞれの傾き $-\frac{1}{2}, -a, 0$ について

$$-\frac{1}{2} < -a < 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < a < \frac{1}{2}$$

したがって, 点 $(2, 1)$ と ℓ の距離が C の半径 $\sqrt{5}$ に等しい.

$$\frac{|2a + 1 - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5} \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + 12a - 4 = 0$$

これを解いて $a = -6 \pm 2\sqrt{10}$

$$\text{このとき} \quad 0 < -6 + 2\sqrt{10} = \frac{4}{2\sqrt{10} + 6} < \frac{4}{6 + 6} = \frac{1}{3}$$

$$0 < a < \frac{1}{2} \text{ に注意して} \quad a = -6 + 2\sqrt{10}$$



3 (1) X は正則であるから、第2式より $Y = O$

これを第1式に代入することにより $X = \frac{1}{2}E$

(2) 2式から Y を消去して整理すると $2X^2 - X = O \quad \dots \textcircled{1}$

X をハミルトン・ケーリーの定理に適用すると

$$X^2 - (a+d)X + (ad-bc)E = O \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② から X^2 を消去して整理すると

$$(2a + 2d - 1)X = O$$

(3) $X \neq O$ であるから

$$2a + 2d - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a + d = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

X は逆行列をもたないから

$$ad - bc = 0 \quad \text{ゆえに} \quad ad = bc \quad \dots \textcircled{4}$$

③, ④ より, a, d は2次方程式

$$x^2 - \frac{1}{2}x + bc = 0$$

の解である. $bc \leq \frac{1}{16}$ に注意して, これを解くと

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 16bc}}{4}$$

よって $(a, d) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 16bc}}{4}, \frac{1 \mp \sqrt{1 - 16bc}}{4} \right)$ (複号同順) ■

4 (1) (*) $\cos b \sin(a - \theta) = \cos a \sin(b - \theta)$ より

$$\frac{1}{2}\{\sin(b + a - \theta) - \sin(b - a + \theta)\} = \frac{1}{2}\{\sin(a + b - \theta) - \sin(a - b + \theta)\}$$

整理すると $\sin(a - b + \theta) - \sin(b - a + \theta) = 0$

したがって $\cos \theta \sin(b - a) = 0$

(2) a, b は 2 曲線 $y = A \cos x, y = \sin(x - \theta)$ の交点であるから

$$(**) \quad A \cos a = \sin(a - \theta), \quad A \cos b = \sin(b - \theta)$$

したがって

$$A \cos a \cos b = \cos b \sin(a - \theta), \quad A \cos a \cos b = \cos a \sin(b - \theta)$$

上の 2 式から, (*) が成立するから, (1) の結果から

$$\cos \theta \sin(b - a) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos \theta = 0 \quad \text{または} \quad \sin(b - a) = 0$$

(i) $\cos \theta = 0$ のとき, $\theta = \frac{\pi}{2}$ より

$$2 \text{ 曲線 } y = A \cos x, \quad y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$

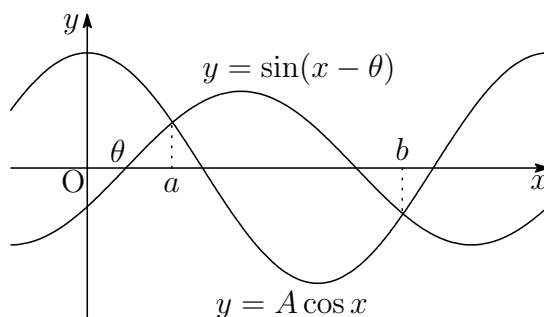
上の 2 式から y を消去すると

$$A \cos x = -\cos x \quad \text{ゆえに} \quad (A + 1) \cos x = 0$$

$$0 \leq a < b \leq 2\pi \text{ に注意して } a = \frac{\pi}{2}, \quad b = \frac{3}{2}\pi \quad \text{ゆえに} \quad b - a = \pi$$

(ii) $\sin(b - a) = 0$ のとき ($0 \leq a < b \leq 2\pi$) $b - a = \pi$

(i), (ii) より $b - a = \pi$



(3) 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \{\sin(x - \theta) - A \cos x\} dx \\ &= \left[-\cos(x - \theta) - A \sin x \right]_a^b \\ &= -\cos(b - \theta) + \cos(a - \theta) - A \sin b + A \sin a \end{aligned}$$

$b - a = \pi$ より, $b = a + \pi$ であるから

$$S = 2\{\cos(a - \theta) + A \sin a\}$$

(4) (**) の第 1 式および (3) の結果をそれぞれ変形すると

$$\sin(a - \theta) - A \cos a = 0, \quad \cos(a - \theta) + A \sin a = \frac{S}{2}$$

上の 2 式から

$$\{\sin(a - \theta) - A \cos a\}^2 + \{\cos(a - \theta) + A \sin a\}^2 = \frac{S^2}{4}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{S^2}{4} &= 1 + A^2 + 2A\{\sin a \cos(a - \theta) - \cos a \sin(a - \theta)\} \\ &= 1 + A^2 + 2A \sin \theta \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad S^2 = 4\{1 + A^2 + 2A \sin \theta\}$$

(5) (4) の結果から, S は $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最大で, 最大値は

$$S = 2(1 + A)$$



- 5 (1) 硬貨の表・裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ であるから, $a = \frac{1}{2}$ とおく.
 $p_2(1)$ は, 硬貨を 2 回投げて表・裏が 1 回ずつ出る確率であるから

$$p_2(1) = {}_2C_1 a^2 = 2a^2 = \frac{1}{2}$$

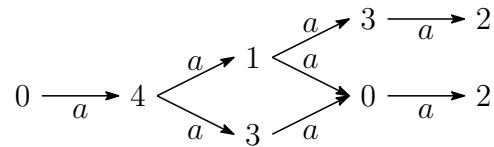
$p_3(2)$ は, 硬貨を 3 回投げて 3 回とも裏が出る確率であるから

$$p_3(2) = a^3 = \frac{1}{8}$$

$p_3(3)$ は, 硬貨を 3 回投げて表が 2 回, 裏 1 回出る確率であるから

$$p_3(3) = {}_3C_2 a^3 = \frac{3}{8}$$

- (2) 点 P の推移は, 次のようになる.



よって, 求める確率は

$$a(aa + aa)a + aaaa = 3a^4 = \frac{3}{16}$$

- (3) $n + 1$ 回目に点 P が 0 の位置にあるとき, n 回目に点 P は 3 または 1 の位置にあるから

$$p_{n+1}(0) = ap_n(3) + ap_n(1) = \frac{1}{2}\{p_n(3) + p_n(1)\}$$

- (4) (3) と同様にして

$$p_{n+1}(1) = \frac{1}{2}\{p_n(4) + p_n(2)\}$$

$$p_{n+1}(2) = \frac{1}{2}\{p_n(0) + p_n(3)\}$$

$$p_{n+1}(3) = \frac{1}{2}\{p_n(1) + p_n(4)\}$$

$$p_{n+1}(4) = \frac{1}{2}\{p_n(2) + p_n(0)\}$$

$z^5 = 1$ に注意して

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{i=0}^4 p_{n+1}(i) z^i &= (z^2 + z^4) p_n(0) + (1 + z^3) p_n(1) + (z + z^4) p_n(2) \\
 &\quad + (1 + z^2) p_n(3) + (z + z^3) p_n(4) \\
 &= (z^2 + z^{-1}) \{ p_n(0) + z p_n(1) + z^2 p_n(2) + z^3 p_n(3) + z^4 p_n(4) \} \\
 &= (z^2 + z^{-1}) \sum_{i=0}^4 p_n(i) z^i
 \end{aligned}$$

したがって
$$\sum_{i=0}^4 p_{n+1}(i) z^i = \frac{z^2 + z^{-1}}{2} \sum_{i=0}^4 p_n(i) z^i$$

ここで
$$\sum_{i=0}^4 p_1(i) z^i = p_1(2) z^2 + p_1(4) z^4 = \frac{z^2 + z^{-1}}{2}$$

よって
$$\sum_{i=0}^4 p_n(i) z^i = \left(\frac{z^2 + z^{-1}}{2} \right)^{n-1} \sum_{i=0}^4 p_1(i) z^i = \left(\frac{z^2 + z^{-1}}{2} \right)^n \quad \blacksquare$$