

平成 15 年度 広島大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

- 1 θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし、複素数平面において $0 \leq \arg z \leq \pi - \theta$ を満たすすべての点 $z (\neq 0)$ と点 0 からなる集合を D とする.

- (1) 複素数平面上に D を図示せよ.
(2) a を $a > 0$ を満たす実数とする. このとき, D に属する点 z に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$|z| \sin \theta \leq |z + a|$$

また, 等号が成り立つときの z を a, θ を用いて表せ.

- 2 $S_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくとき, 次の問いに答えよ.

- (1) すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ について, $\frac{1}{\pi(n+1)^2} \leq S_n \leq \frac{1}{\pi n^2}$ が成り立つことを示せ.
(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k}$ の値を求めよ.

- 3 a を $2 < a < 3$ を満たす定数とし,

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(e^x - 1 + \frac{a - e^x}{a - 2} - \left| e^x - 1 - \frac{a - e^x}{a - 2} \right| \right)$$

とおく. ただし, e は自然対数の底である.

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.
(2) $y = f(x)$ のグラフの $y \geq 0$ の部分と x 軸とで囲まれる図形を直線 $x = \log 2$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

4 F 君は G 君の投げるボールを確率 $p(0 < p < 1)$ でヒットする．自然数 n に対して，1 から n までの数字を 1 つずつ記入した n 枚のカードが入った箱 B_n がある．G 君が箱 B_n から勝手にカードを 1 枚引いて，カードに書かれている数字の回数だけ F 君にボールを投げる試行を考える．

- (1) 箱 B_k を用いた試行で F 君が k 本ヒットを打つ確率を q_k ，また箱 B_{k+1} を用いた試行で F 君が k 本ヒットを打つ確率を r_k とするとき， $(k+1)r_k - kq_k$ を p ， k を用いて表せ．
- (2) 箱 B_k を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を $q_j(0 \leq j \leq k)$ ，箱 B_{k+1} を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を $r_j(0 \leq j \leq k+1)$ とするとき， $(k+1)r_j - kq_j(0 \leq j \leq k)$ を p ， k ， j を用いて表せ．
- (3) 箱 B_n を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を $p_j(0 \leq j \leq n)$ とし， $\alpha = pt + 1 - p$ とすると，変数 t に関して次の等式が成り立つことを示せ．

$$p_0 + p_1t + p_2t^2 + \cdots + p_nt^n = \frac{1}{n}(\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)$$

- (4) 箱 B_n を用いた試行において，F 君が打つヒットの数の期待値 E を n ， p を用いて表せ．

5 a, b を $a^2 - 4b < 0$ を満たす実数とする.

(1) 実数を成分とする 2 次の正方行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が等式

$$(*) \quad X^2 - aX + bE = O$$

を満たすならば,

$$x + w = a, \quad xw - yz = b$$

が成り立つことを示せ. ただし, O は 2 次の零行列であり, E は 2 次の単位行列である.

(2) 等式 $(*)$ を満たす実数を成分とする 2 次の正方行列全体の集合を S とする. S に属する行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対し, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$(**) \quad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \geq 2b$$

また, 等号が成り立つときの X を a, c を用いて表せ. ただし, $c = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$ とする.

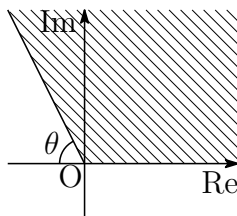
(3) A, B を不等式 $(**)$ において等号が成り立つ S に属する 2 つの相異なる行列とする. このとき

$$(X - A)(X - B) = O$$

を満たす S に属する行列 X は A または B であることを示せ.

解答例

- 1 (1) 条件から, D の表す領域は, 下の図の斜線部分である.

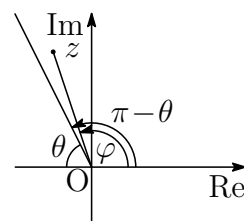


- (2) $\varphi = \arg z$ とすると, 条件から

$$\varphi \leq \pi - \theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos \varphi \geq \cos(\pi - \theta)$$

上式において, 等号が成立するとき

$$\varphi = \pi - \theta$$



したがって

$$\begin{aligned} |z + a|^2 - |z|^2 \sin^2 \theta &= |z|^2 \cos^2 \theta + a(z + \bar{z}) + a^2 \\ &= |z|^2 \cos^2 \theta + 2a|z| \cos \varphi + a^2 \\ &\geq |z|^2 \cos^2 \theta + 2a|z| \cos(\pi - \theta) + a^2 \\ &= |z|^2 \cos^2 \theta - 2a|z| \cos \theta + a^2 \\ &= (|z| \cos \theta - a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

よって $|z| \sin \theta \leq |z + a| \quad \cdots (*)$

また, $(*)$ において等号が成立するとき

$$\varphi = \pi - \theta, \quad |z| \cos \theta - a = 0$$

このとき, $|z| = \frac{a}{\cos \theta}$, $\varphi = \pi - \theta$ であるから

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= \frac{a}{\cos \theta}(-\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= a(-1 + i \tan \theta) \end{aligned}$$

■

2 (1) $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ において

$$\frac{1 - \cos x}{(n+1)^2\pi^2} \leq \frac{1 - \cos x}{x^2} \leq \frac{1 - \cos x}{n^2\pi^2}$$

したがって

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1 - \cos x}{(n+1)^2\pi^2} dx \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1 - \cos x}{n^2\pi^2} dx$$

$$\text{このとき} \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (1 - \cos x) dx = \left[x - \sin x \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \pi$$

よって, $S_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) について

$$\frac{1}{\pi(n+1)^2} \leq S_n \leq \frac{1}{\pi n^2}$$

(2) (1) の結果から $\pi k^2 \leq \frac{1}{S_k} \leq \pi(k+1)^2$

$$\frac{\pi}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \leq \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} \leq \frac{\pi}{n^3} \sum_{k=1}^n (k+1)^2$$

このとき

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^3} \sum_{k=1}^n (k+1)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^3} \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k + 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^3} \left\{ \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \left\{ \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right\} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

よって, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} = \frac{\pi}{3}$$

■

$$\boxed{3} \quad (1) \quad f(x) = \frac{1}{2} \left(e^x - 1 + \frac{a - e^x}{a - 2} - \left| e^x - 1 - \frac{a - e^x}{a - 2} \right| \right)$$

$$e^x - 1 - \frac{a - e^x}{a - 2} = \frac{(a - 1)(e^x - 2)}{a - 2} \text{ より } (2 < a < 3)$$

$$x \leq \log 2 \text{ のとき } e^x - 1 - \frac{a - e^x}{a - 2} \leq 0$$

$$\log 2 \leq x \text{ のとき } e^x - 1 - \frac{a - e^x}{a - 2} \geq 0$$

(i) $x \leq \log 2$ のとき

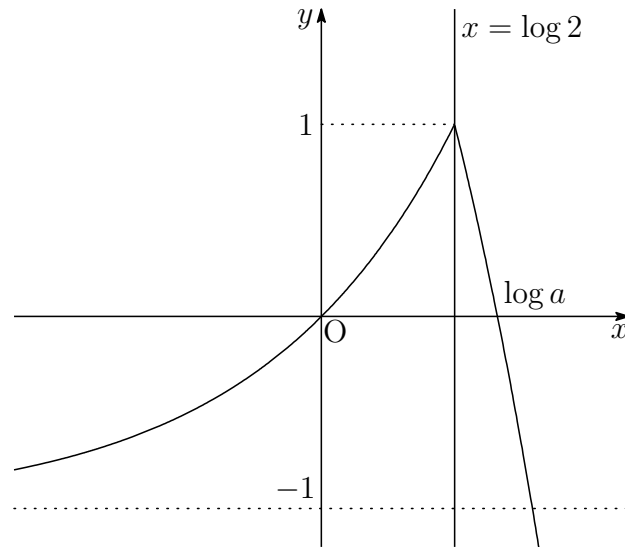
$$f(x) = \frac{1}{2} \left\{ e^x - 1 + \frac{a - e^x}{a - 2} + \left(e^x - 1 - \frac{a - e^x}{a - 2} \right) \right\} = e^x - 1$$

(ii) $\log 2 \leq x$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{2} \left\{ e^x - 1 + \frac{a - e^x}{a - 2} - \left(e^x - 1 - \frac{a - e^x}{a - 2} \right) \right\} = \frac{a - e^x}{a - 2}$$

$$(i), (ii) \text{ より } f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & (x \leq \log 2) \\ \frac{a - e^x}{a - 2} & (\log 2 \leq x) \end{cases}$$

よって, $y = f(x)$ のグラフは次のようになる.



(2) (i) $x \leq \log 2$ のとき, 曲線 $y = f(x)$ の方程式を $x = \varphi(y)$ とすると

$$y = e^x - 1 \quad \text{ゆえに} \quad \varphi(y) = \log(y + 1)$$

(ii) $\log 2 \leq x$ のとき, 曲線 $y = f(x)$ の方程式を $x = \psi(y)$ とすると

$$y = \frac{a - e^x}{a - 2} \quad \text{ゆえに} \quad \psi(y) = \log\{a - (a - 2)y\}$$

ここで

$$\log g(y) = \log(y + 1) + \log\{a - (a - 2)y\}$$

とおくと ($0 \leq y \leq 1$)

$$\begin{aligned} g(y) &= (y + 1)\{a - (a - 2)y\} \\ &= -(a - 2)y^2 + 2y + a \\ &= -(a - 2)\left(y - \frac{1}{a - 2}\right)^2 + \frac{1}{a - 2} + a \end{aligned}$$

$2 < a < 3$ より, $1 < \frac{1}{a - 2}$ であるから, $g(y)$ は $0 \leq y \leq 1$ で単調増加

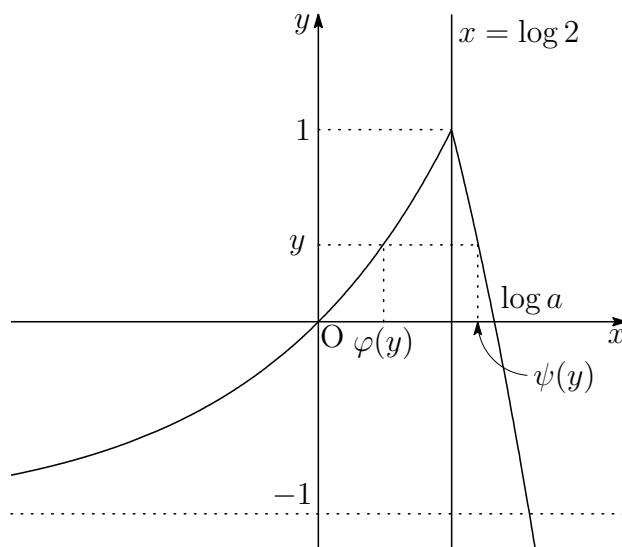
$$g(y) \leq g(1) \quad \text{ゆえに} \quad \log g(y) \leq 2 \log 2$$

したがって $\log(y + 1) + \log\{a - (a - 2)y\} \leq 2 \log 2$

$$\log\{a - (a - 2)y\} - \log 2 \leq \log 2 - \log(y + 1)$$

$$\psi(y) - \log 2 \leq \log 2 - \varphi(y)$$

$\log 2 - \varphi(y) \geq \psi(y) - \log 2$ であるから, 求める回転体の体積は, 曲線 $x = \varphi(y)$ ($0 \leq y \leq 1$) を $x = \log 2$ のまわりに 1 回転させたものである.



求める回転体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^1 \{\log 2 - \varphi(y)\}^2 dy$$

$$x = \varphi(y) \text{ とすると, } y = e^x - 1 \quad \frac{dy}{dx} = e^x \quad \begin{array}{c|c|c} y & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline x & 0 & \longrightarrow & \log 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\log 2} e^x (x - \log 2)^2 dx \\ &= \left[e^x \left\{ (x - \log 2)^2 - 2(x - \log 2) + 2 \right\} \right]_0^{\log 2} \\ &= -(\log 2)^2 - 2 \log 2 + 2 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad V = \pi \{ -(\log 2)^2 - 2 \log 2 + 2 \}$$

補足 対数型から指数型の積分に置換すると, 次の積分公式が利用できる¹.

$$\int e^{px+q} f(x) dx = \frac{e^{px+q}}{p} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots \right\} + C$$

■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf (p.7)

- 4** (1) q_k は B_k から k のカードを引き, k 本ともヒットを打つ確率であるから

$$q_k = \frac{1}{k} \cdot p^k \quad \text{ゆえに} \quad kq_k = p^k$$

r_k は B_{k+1} から k のカードを引き k 本ともヒットを打つか, $k+1$ のカードを引き k 本がヒットで 1 本がヒットでない確率であるから

$$r_k = \frac{1}{k+1} p^k + \frac{1}{k+1} \cdot {}_{k+1}C_k p^k (1-p)$$

$$(k+1)r_k = p^k + (k+1)p^k(1-p)$$

$$\text{よって} \quad (k+1)r_k - kq_k = (k+1)p^k(1-p)$$

- (2) (1) と同様に

$$q_j = \begin{cases} \frac{1}{k} \sum_{l=j}^k {}_lC_j p^j (1-p)^{l-j} & (j \neq 0) \\ \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k (1-p)^l & (j = 0) \end{cases}$$

$$r_j = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{l=j}^{k+1} {}_lC_j p^j (1-p)^{l-j} & (j \neq 0) \\ \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^{k+1} (1-p)^l & (j = 0) \end{cases}$$

$$\text{よって} \quad (k+1)r_j - kq_j = {}_{k+1}C_j p^j (1-p)^{k+1-j}$$

$$(3) \quad p_j = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{l=j}^n {}_lC_j p^j (1-p)^{l-j} & (j \neq 0) \\ \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (1-p)^l & (j = 0) \end{cases}$$

ここで、0以上の整数 m, n について

$$\binom{m}{n} = \begin{cases} {}_mC_n & (m \geq n) \\ 0 & (m < n) \end{cases}$$

と定義すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n) &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \alpha^l = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (pt + 1 - p)^l \\ &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^l {}_lC_j (pt)^j (1-p)^{l-j} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^n \binom{l}{j} p^j (1-p)^{l-j} t^j \\ &= \sum_{j=0}^n \left\{ \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \binom{l}{j} p^j (1-p)^{l-j} \right\} t^j = \sum_{j=0}^n p_j t^j \\ &= p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n \end{aligned}$$

$$(4) \quad \alpha = pt + 1 - p \text{ より } \frac{d}{dt} \alpha^k = k \alpha^{k-1} p$$

(3) の結果を t について微分すると

$$p_1 + 2p_2 t + \cdots + np_n t^{n-1} = \frac{1}{n} (p + 2\alpha p + \cdots + n\alpha^{n-1} p)$$

$t = 1$ を上式に代入すると、 $\alpha = 1$ に注意して

$$E = p_1 + 2p_2 + \cdots + np_n = \frac{1}{n} (1 + 2 + \cdots + n)p = \frac{(n+1)p}{2}$$

■

- 5** (1) 実数を成分とする2次の正方行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ をハミルトン・ケーリーの定理に適用すると

$$X^2 - (x + w)X + (xw - yz)E = O$$

また, X が等式

$$(*) \quad X^2 - aX + bE = O$$

を満たすから, 上の2式から

$$(x + w - a)X = (xw - yz - b)E \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x + w - a \neq 0$ と仮定すると, 実数 k を用いて, $X = kE$ とおける.
これを $(*)$ に代入すると

$$(k^2 - ak + b)E = O$$

2次方程式 $k^2 - ak + b = 0$ が実数解をもつから, 係数について

$$a^2 - 4b \geq 0$$

これは, $a^2 - 4b < 0$ に反するから

$$x + w - a = 0$$

これを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$(xw - yz - b)E = O \quad \text{ゆえに} \quad xw - yz - b = 0$$

よって $x + w = a, \quad xw - yz = b$

(2) $b = xw - yz$ であるから

$$\begin{aligned}(x - w)^2 + (y + z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2(xw - yz) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2b \geq 0\end{aligned}$$

よって $(**) \quad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \geq 2b$

$(**)$ について、等号が成立するとき $x - w = 0, \quad y + z = 0$

これと (1) の結論から

$$x = w = \frac{a}{2}, \quad y = \pm c, \quad z = \mp c \quad (\text{複号同順})$$

よって $X = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & \pm c \\ \mp c & \frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$

(3) (2) の結果から、等号が成立する異なる 2 つの行列 A, B について、一般性を失うことなく

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & 2c \\ -2c & a \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & -2c \\ 2c & a \end{pmatrix}$$

このとき、 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\det(X - A) - \det(X - B) &= -(y - c)(z + c) + (y + c)(z - c) \\ &= -2c(y - z)\end{aligned}$$

$X \in S$ であるから、(1) の結論より

$$a^2 - 4b = (x + w)^2 - 4(xw - yz) = (x - w)^2 + 4yz < 0$$

$yz < 0$ であるから、 $y \neq z$ より、 $y - z \neq 0$. $c = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \neq 0$ であるから

$$\det(X - A) - \det(X - B) \neq 0$$

ゆえに $\det(X - A) \neq \det(X - B)$

少なくとも $\det(X - A)$ と $\det(X - B)$ の一方が正則であるから

$$X - A = O \quad \text{または} \quad X - B = O$$

よって、行列 X は A または B である. ■