

平成26年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
 教育(第一類・第二類(技術・情報系)・第四類(人間生活系))・
 経済(昼)・歯(口腔健康科学(口腔保健))

問題 1 2 3 4 5

- 1 座標平面上で、原点 O を中心とする半径1の円を C とする. C の外部にある点 $P(a, b)$ から C にひいた2本の接線と C との接点を H, H' とする. $\angle OPH = \theta$ とするとき、次の問いに答えよ.

- (1) PH の長さ、および $\sin \theta$ を a, b を用いて表せ.
- (2) $HH' = OP$ となるような点 P の軌跡を求めよ.

- 2 a_1, a_2, a_3 は定数で、 $a_1 > 0$ とする. 放物線 $C: y = a_1x^2 + a_2x + a_3$ 上の点 $P(2, 4a_1 + 2a_2 + a_3)$ における接線を ℓ とし、 ℓ と x 軸との交点を $Q(q, 0)$ 、 ℓ と y 軸との交点を $R(0, a_4)$ とする. a_1, a_2, a_3, a_4 がこの順に等差数列であるとき、次の問いに答えよ.

- (1) a_2, a_3, a_4 を a_1 を用いて表せ.
- (2) q の値を求めよ.
- (3) 放物線 C 、接線 ℓ 、および y 軸で囲まれた部分の面積を S とする. $S = q$ となるとき、 a_1 を求めよ.

- 3 四面体 $OABC$ において、 $\triangle OAB$ の重心を F 、 $\triangle OAC$ の重心を G とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $\overrightarrow{OF}$ を $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ を用いて表せ.
- (2) $\overrightarrow{FG} \parallel \overrightarrow{BC}$ であることを示せ.
- (3) $OB = OC = 1, \angle BOC = 90^\circ$ のとき、 FG の長さを求めよ.

- 4 $\alpha > 1$ とする. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

- (1) $a_n > 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
- (2) $\sqrt{x} - 1 \leq \frac{1}{2}(x - 1) \quad (\text{ただし, } x > 1 \text{ とする.})$
- (3) $a_n - 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (\alpha - 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

5 正六角形の頂点を反時計回りに $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ とする. 1 個のさいころを 2 回投げて, 出た目を順に j, k とする. 次の問いに答えよ.

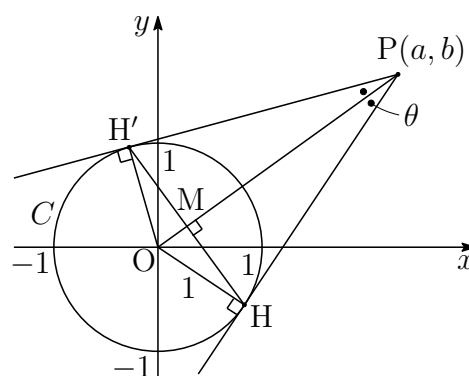
- (1) P_1, P_j, P_k が異なる 3 点となる確率を求めよ.
- (2) P_1, P_j, P_k が正三角形の 3 頂点となる確率を求めよ.
- (3) P_1, P_j, P_k が直角三角形の 3 頂点となる確率を求めよ.

解答例

1 (1) $OP = \sqrt{a^2 + b^2}$, $OH = 1$ より

$$\begin{aligned} PH &= \sqrt{OP^2 - OH^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\text{また } \sin \theta = \frac{OH}{OP} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



(2) 線分 HH' の中点を M とすると, (1) の結果を利用して

$$HM = PH \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2 - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{したがって } HH' = 2HM = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$HH' = OP$ のとき, $HH'^2 - OP^2 = 0$ より

$$\frac{4(a^2 + b^2 - 1)}{a^2 + b^2} - (a^2 + b^2) = 0$$

$$\text{ゆえに } (a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 + b^2) + 4 = 0$$

$$(a^2 + b^2 - 2)^2 = 0$$

$$a^2 + b^2 = 2$$

よって, 点 $P(a, b)$ の描く軌跡は, 原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円.

補足 直線 HH' は, 点 $P(a, b)$ を極とする極線¹であるから, その方程式は

$$ax + by = 1$$

原点 O から極線 HH' までの距離 d は

$$d = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{したがって } HH' = 2\sqrt{1^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

■

¹ <http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki.2012.pdf> **7** 参照.

- 2 (1) $y = a_1x^2 + a_2x + a_3$ より $y' = 2a_1x + a_2$
 $x = 2$ のとき, $y' = 4a_1 + a_2$ より, 点 $P(2, 4a_1 + 2a_2 + a_3)$ における接線は

$$y - (4a_1 + 2a_2 + a_3) = (4a_1 + a_2)(x - 2)$$

したがって, ℓ の方程式は $y = (4a_1 + a_2)x - 4a_1 + a_3$

また, ℓ は, 2点 $Q(q, 0)$, $R(0, a_4)$ を通るから, その方程式は

$$\frac{x}{q} + \frac{y}{a_4} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = -\frac{a_4}{q}x + a_4$$

これらの直線の方程式は一致するから

$$(*) \quad \begin{cases} 4a_1 + a_2 = -\frac{a_4}{q} \\ -4a_1 + a_3 = a_4 \end{cases}$$

(*) の第 2 式から $a_4 - a_3 = -4a_1$

数列 a_1, a_2, a_3, a_4 は等差数列であるから, 公差を d とすると $d = -4a_1$

したがって $a_2 = a_1 + d = a_1 + (-4a_1) = -3a_1$

$$a_3 = a_1 + 2d = a_1 + 2(-4a_1) = -7a_1$$

$$a_4 = a_1 + 3d = a_1 + 3(-4a_1) = -11a_1$$

- (2) (*) の第 1 式から $q = -\frac{a_4}{4a_1 + a_2}$

これに (1) の結果を代入して $q = -\frac{-11a_1}{4a_1 + (-3a_1)} = 11$

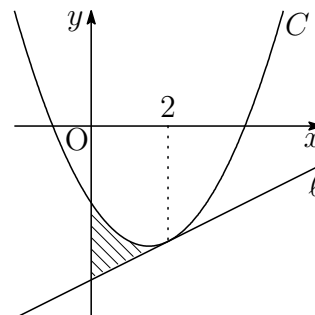
- (3) (1) の結果から

$$C: y = a_1x^2 - 3a_1x - 7a_1$$

$a_4 = -11a_1$, $q = 11$ から

$$\ell: y = a_1x - 11a_1$$

$a_1 > 0$ であるから



$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(a_1x^2 - 3a_1x - 7a_1) - (a_1x - 11a_1)\} dx \\ &= a_1 \int_0^2 (x-2)^2 dx = a_1 \left[\frac{1}{3}(x-2)^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}a_1 \end{aligned}$$

$$S = q \text{ より } \frac{8}{3}a_1 = 11 \quad \text{これを解いて} \quad a_1 = \frac{33}{8}$$

■

3 (1) $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

(2) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ であるから, これと (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad \text{よって} \quad \overrightarrow{FG} // \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

(3) $\angle BOC = 90^\circ$ より $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

よって, (2) の結果から $FG = \frac{1}{3}BC = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ■

4 (1) 漸化式

$$a_1 = \alpha > 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

より, $a_n > 0$. また, 上式から $a_{n+1}^2 - 1 = \frac{2a_n}{a_n + 1} - 1$

ゆえに $a_{n+1} - 1 = \frac{1}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}(a_n - 1) \quad \dots (*)$

したがって $a_n - 1 > 0$ のとき $a_{n+1} - 1 > 0$

$a_1 - 1 > 0$ であるから, すべての自然数 n について

$$a_n - 1 > 0 \quad \text{すなわち} \quad a_n > 1$$

(2) $\frac{1}{2}(x - 1) - (\sqrt{x} - 1) = \frac{1}{2}(x - 2\sqrt{x} + 1) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$

よって $\sqrt{x} - 1 \leq \frac{1}{2}(x - 1)$

(3) 漸化式および (2) の結果から

$$a_{n+1} - 1 = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}} - 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2a_n}{a_n + 1} - 1 \right) = \frac{1}{2(a_n + 1)}(a_n - 1)$$

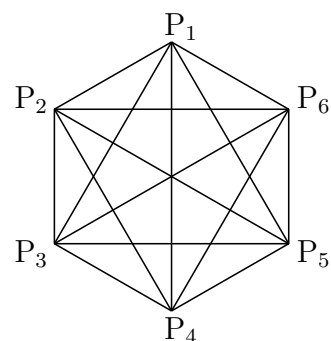
(1) の結果から $\frac{1}{2(a_n + 1)} \leq \frac{1}{4}$ ゆえに $a_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{4}(a_n - 1)$

よって $a_n - 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (a_1 - 1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (\alpha - 1)$

別解 $a_n > 1$ から $\frac{1}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)} \leq \frac{1}{4}$ $(*)$ より $a_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{4}(a_n - 1)$ ■

- 5 (1) P_1, P_j, P_k が異なる 3 点となる場合の数, すなわち, (j, k) の組の総数は, 2, 3, 4, 5, 6 の 5 個から 2 個取り出して並べる順列の総数である. よって, 求める確率は

$$\frac{{}_5P_2}{6^2} = \frac{5 \cdot 4}{36} = \frac{5}{9}$$



- (2) $\triangle P_1 P_j P_k$ が正三角形となるのは, 次の 2 組である.

$$(j, k) = (3, 5), (5, 3)$$

よって, 求める確率は $\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$

- (3) 正六角形の頂点は同一円周上の点であるから, $\triangle P_1 P_j P_k$ が直角三角形となるとき, $P_1 P_4, P_2 P_5, P_3 P_6$ を辺にもつ場合で, それぞれの三角形の個数は, 4, 1, 1 である.

よって, 求める確率は $\frac{(4 + 1 + 1) \times 2}{6^2} = \frac{1}{3}$ ■