

平成 25 年度 広島大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
 教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・
 経済 (昼)・歯 (口腔健康科学 (口腔保健))

問題 1 2 3 4 5

1 放物線 $y = 2x^2 - 8$ を C とする. x 軸上の点 $A(a, 0)$ ($a > 0$) を通り C と接する直線が 2 本あるとき, 次の問いに答えよ.

- (1) a の値の範囲を求めよ.
- (2) 2 つの接点 P, Q の x 座標をそれぞれ α, β ($\alpha < \beta$) とする. $\beta - \alpha = 3$ のとき, a の値と 2 本の接線の方程式を求めよ.
- (3) (2) で求めた 2 本の接線と C で囲まれた部分の面積を求めよ.

2 座標平面上に点 $A(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 < \theta < \pi$) がある. 原点を O とし, x 軸に関して点 A と対称な点を B とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $-1 < \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \leq \frac{1}{2}$ となる θ の範囲を求めよ.

- (2) 点 P を

$$\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

で定める. 点 P から x 軸に下ろした垂線を PQ とする. θ が (1) で求めた範囲を動くとき, $\triangle POQ$ の面積の最大値を求めよ.

3 関数 $f(x) = \log_2(x+1)$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) 0 以上の整数 k に対して, $f(x) = \frac{k}{2}(f(1) - f(0))$ を満たす x を k を用いて表せ.

- (2) (1) で求めた x を x_k とおく. $S_n = \sum_{k=1}^n k(x_k - x_{k-1})$ を n を用いて表せ.

4 座標平面上で, 原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし, 2 点 $P(0, 1), Q(s, 0)$ を考える. 2 点 P, Q を通る直線を ℓ とし, ℓ と C の交点のうち P ではないものを R とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 点 R の座標を s を用いて表せ.
- (2) x 座標と y 座標がともに有理数である点を有理点という. s が有理数のとき, R は有理点であることを示せ.

- 5 座標平面上の点で， x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という． n を 3 以上の自然数とし，連立不等式

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq n$$

の表す領域を D とする．格子点 $A(a, b)$ に対して，領域 D 内の格子点 $B(c, d)$ が $|a - c| + |b - d| = 1$ を満たすとき，点 B を点 A の隣接点という．次の問いに答えよ．

- (1) 点 $O(0, 0)$ の隣接点をすべて求めよ．また，領域 D 内の格子点 P が直線 $x + y = n$ 上にあるとき， P の隣接点の個数を求めよ．
- (2) 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ．
- (3) 領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき，隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ．ただし，格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする．

解答例

- 1 (1) $C: y = 2x^2 - 8$ より $y' = 4x$
 C 上の点 $(t, 2t^2 - 8)$ における接線の方程式は

$$y - (2t^2 - 8) = 4t(x - t)$$

$$\text{すなわち } y = 4tx - 2t^2 - 8 \quad \cdots \textcircled{1}$$

この直線が点 $A(a, 0)$ を通るから

$$0 = 4ta - 2t^2 - 8$$

$$\text{ゆえに } t^2 - 2at + 4 = 0 \quad \cdots (*)$$

この2次方程式は異なる2つの実数解をもつから、係数について

$$D/4 = (-a)^2 - 1 \cdot 4 = a^2 - 4 > 0$$

$a > 0$ に注意して、これを解くと $a > 2$

- (2) α, β ($\alpha < \beta$) は方程式 $(*)$ の解であるから、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2a > 4, \quad \alpha\beta = 4$$

$\beta - \alpha = 3$ および上の2式との連立方程式を解くと

$$\alpha = 1, \quad \beta = 4, \quad a = \frac{5}{2}$$

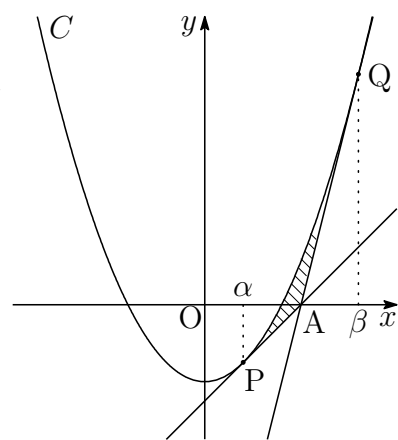
2本の接線の方程式は、 $t = 1, 4$ を $\textcircled{1}$ に代入することにより

$$y = 4x - 10, \quad y = 16x - 40$$

- (3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\frac{5}{2}} \{(2x^2 - 8) - (4x - 10)\} dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 \{(2x^2 - 8) - (16x - 40)\} dx \\ &= \int_1^{\frac{5}{2}} 2(x - 1)^2 dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 2(x - 4)^2 dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(x - 1)^3 \right]_1^{\frac{5}{2}} + \left[\frac{2}{3}(x - 4)^3 \right]_{\frac{5}{2}}^4 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

補足 $a = \frac{\alpha + \beta}{2}$, C と直線 PQ で囲まれた部分の面積を S_0 とすると¹, $S = \frac{S_0}{2}$



¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-bun-2009.pdf> 4 を参照.

- 2** (1) $A(\cos \theta, \sin \theta)$ より, $B(\cos \theta, -\sin \theta)$ であるから

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

$$-1 < \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \leq \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$-1 < \cos 2\theta \leq \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\pi}{3} \leq 2\theta < \pi, \quad \pi < 2\theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{よって} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{5}{6}\pi$$

- (2) $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ より

$$\overrightarrow{OP} = 2(\cos \theta, \sin \theta) + \frac{1}{2}(\cos \theta, -\sin \theta)$$

$$= \left(\frac{5}{2} \cos \theta, \frac{3}{2} \sin \theta \right),$$

$$\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{5}{2} \cos \theta, 0 \right)$$

$$\text{ゆえに} \quad \triangle POQ = \frac{1}{2} \left| \frac{3}{2} \sin \theta \cdot \frac{5}{2} \cos \theta \right| = \frac{15}{16} |\sin 2\theta|$$

$$\text{よって} \quad 2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \text{ すなわち, } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \text{ のとき, 最大値 } \frac{15}{16} \quad \blacksquare$$

- 3** (1) $f(x) = \log_2(x+1)$ より $f(0) = 0, f(1) = 1$

$$f(x) = \frac{k}{2}(f(1) - f(0)) \text{ より}$$

$$\log_2(x+1) = \frac{k}{2}(1-0) \quad \text{よって} \quad x = 2^{\frac{k}{2}} - 1$$

- (2) (1) の結果から, $x_k = 2^{\frac{k}{2}-1}$ であるから

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n k(2^{\frac{k}{2}} - 2^{\frac{k-1}{2}}) \\ &= \sum_{k=1}^n \{k \cdot 2^{\frac{k}{2}} - (k-1) \cdot 2^{\frac{k-1}{2}}\} - \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k-1}{2}} \\ &= n \cdot 2^{\frac{n}{2}} - \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2} - 1} \\ &= n(\sqrt{2})^n - (\sqrt{2} + 1)\{(\sqrt{2})^n - 1\} \\ &= (n - \sqrt{2} - 1)(\sqrt{2})^n + \sqrt{2} + 1 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

4 (1) C の方程式は $x^2 + y^2 = 1$

$x \neq 0$ のとき, 直線 ℓ の方程式は $\frac{x}{s} + y = 1$

このとき, C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x^2 + \left(1 - \frac{x}{s}\right)^2 = 1 \quad \text{整理すると} \quad x\{(s^2 + 1)x - 2s\} = 0$$

R の x 座標は P と異なるから $x = \frac{2s}{s^2 + 1}$

これを ℓ の方程式に代入すると

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{2s}{s^2 + 1} + y = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}$$

$s = 0$ のときも上の $R(x, y)$ は成立する.

よって, 求める R の座標は $\left(\frac{2s}{s^2 + 1}, \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}\right)$

(2) s が有理数のとき, $s = \frac{m}{n}$ (m, n は整数, $n \neq 0$) とおくと

$$x = \frac{2s}{s^2 + 1} = \frac{2 \cdot \frac{m}{n}}{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1} = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

$$y = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1} = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 1}{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$$

R の x 座標と y 座標は, 有理数であるから, R は有理点である.

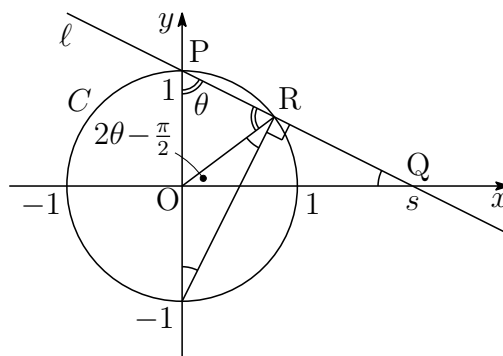
補足 右の図において, $s = \tan \theta$ とおくと
 $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$, $R(x, y)$ は

$$x = \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2\theta$$

$$= \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2s}{1 + s^2},$$

$$y = \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\theta$$

$$= -\frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = -\frac{1 - s^2}{1 + s^2}$$



■

- 5 (1) 原点 O の隣接点は, $(1, 0)$, $(0, 1)$ の **2** 個

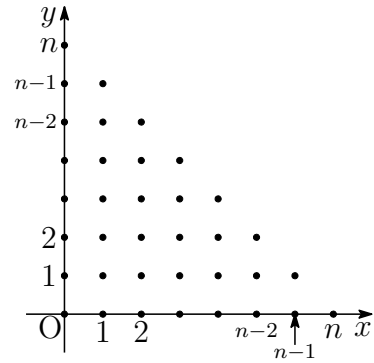
直線 $x + y = n$ 上の格子点 $P(k, n - k)$ の隣接点の個数は $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$

$k = 0, n$ のとき 1 個, $k = 1, 2, \dots, n - 1$ のとき 2 個

- (2) 領域 D 内の格子点 (x, y) で隣接点の個数が 4 であるものは, $1 \leq k \leq n - 2$ とすると, 直線 $x = k$ 上には, 次の $n - k - 1$ 個ある.

$(k, 1), (k, 2), \dots, (k, n - k - 1)$

したがって, 求める個数は



$$\sum_{k=1}^{n-2} (n - k - 1) = \sum_{k=1}^{n-2} k = \frac{1}{2}(n - 2)(n - 1) \quad (\text{個})$$

- (3) 格子点 $(n, 0)$, $(0, n)$ は隣接点が 1 個ある.

$1 \leq k \leq n - 1$ のとき, 格子点 $(k, n - k)$, $(0, 0)$ は隣接点が 2 個ある.

$1 \leq k \leq n - 1$ のとき, 格子点 $(k, 0)$, $(0, k)$ は隣接点が 3 個ある.

(2) で示した格子点は隣接点が 4 個ある.

領域 D 内の格子点の個数を N とすると

$$N = \sum_{k=0}^n (n + 1 - k) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$$

したがって, 隣接点の個数の期待値は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \left\{ 1 \cdot 2 + 2 \cdot n + 3 \cdot 2(n - 1) + 4 \cdot \frac{1}{2}(n - 2)(n - 1) \right\} \\ &= \frac{2n(n + 1)}{N} = \frac{2n(n + 1)}{\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)} = \frac{4n}{n + 2} \end{aligned}$$

この期待値が 3 以上であるとき $\frac{4n}{n + 2} \geq 3$ よって $n \geq 6$ ■