

平成 24 年度 広島大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
 教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・
 経済 (昼)・歯 (口腔健康科学 (口腔保健))

問題 1 2 3 4 5

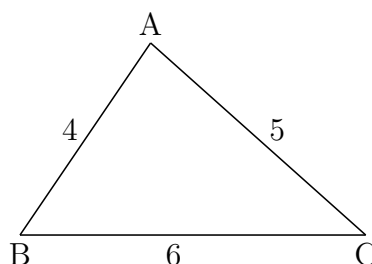
1 $f(x) = \log_2(x-1) + \log_2(4-x)$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ.
- (2) 不等式 $f(x) \geq 0$ を解け.
- (3) 関数 $f(x)$ の最大値を m とするとき, 2^{m-2} を求めよ.
- (4) (3) の m について, 1000^m の整数部分の桁数を求めよ. ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

2 放物線 $C: y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ 上に 2 点 A, B があり, A の x 座標は 3 である. 点 A, 点 B における C の接線をそれぞれ ℓ , m とし, ℓ と m の交点を P とおくと, $\angle APB = 45^\circ$ であった. 次の問いに答えよ.

- (1) 接線 ℓ の方程式を求めよ.
- (2) 接線 m の傾きを求めよ.
- (3) 点 P の座標を求めよ.
- (4) C , ℓ , m で囲まれた図形において, 不等式 $x \geq 0$ を満たす部分の面積 S を求めよ.

3 図のような 3 辺の長さをもつ三角形 ABC がある.



次の問いに答えよ.

- (1) $45^\circ < \angle B < 60^\circ$ を証明せよ.
- (2) $\angle A = 2\angle C$ を証明せよ.
- (3) $40^\circ < \angle C < 45^\circ$ を証明せよ.

- 4 N は 4 以上の整数とする．次の規則にしたがって 1 個のさいころを繰り返し投げる．

規則： 出た目を毎回記録し，偶数の目が 3 回出るか，あるいは奇数の目が N 回出たところで，さいころを投げる操作を終了する．

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする．次の問いに答えよ．

- (1) さいころを投げる回数は，最大で何回か．
 - (2) さいころを 3 回投げて操作を終了する確率を求めよ．
 - (3) さいころを N 回投げて操作を終了する確率を求めよ．
 - (4) 最後に奇数の目が出て操作を終了する確率を求めよ．
 - (5) $N = 4$ のとき，さいころを投げる回数の期待値を求めよ．
- 5 n は 3 以上の整数とする．1 から n までの整数から連続する 2 つの整数 $x, x + 1$ を取り除く．次に問いに答えよ．

- (1) $n = 17$ のとき，残された整数の総和を個数 15 で割った値が $\frac{42}{5}$ であるとする．取り除いた 2 つの整数を求めよ．
- (2) $n \geq 39$ のとき，不等式

$$\frac{1}{2}n(n+1) - 1 - 2(n-1) > \frac{205}{11}(n-2)$$

が成り立つことを証明せよ．

- (3) 残された整数の総和を個数 $n - 2$ で割った値が $\frac{205}{11}$ であるとする． n と取り除いた 2 つの整数を求めよ．

解答例

1 (1) $x - 1 > 0, 4 - x > 0$ すなわち $1 < x < 4$

(2) 不等式を変形すると $\log_2(x-1)(4-x) \geq \log_2 1$

底 2 は 1 より大きいから $(x-1)(4-x) \geq 1$

整理すると $x^2 - 5x + 5 \geq 0$

(1) の結果に注意して、これを解くと $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$

(3) $f(x) = \log_2(x-1)(4-x) = \log_2(-x^2 + 5x - 4) = \log_2 \left\{ -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \right\}$

ゆえに $m = \log_2 \frac{9}{4}$ したがって $m-2 = \log_2 \frac{9}{16}$ よって $2^{m-2} = \frac{9}{16}$

(4) $1000^m = 10^{3m}$ であるから

$$\begin{aligned} 3m &= 3 \log_2 \frac{9}{4} = 6 \log_2 \frac{3}{2} = 6(\log_2 3 - 1) \\ &= 6 \left(\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} - 1 \right) = 6 \left(\frac{0.4771}{0.3010} - 1 \right) = 3.5 \dots \end{aligned}$$

$3 < 3m < 4$ であるから、求める桁数は 4

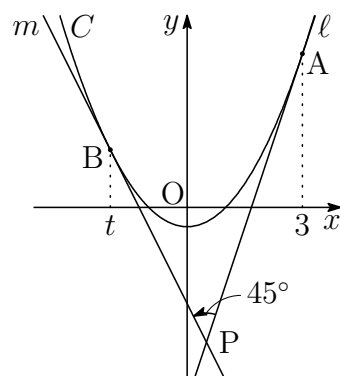
2 (1) $C: y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ より $y' = x$

ℓ は C 上の点 $A(3, 4)$ における接線であるから

$$y - 4 = 3(x - 3) \quad \text{すなわち} \quad y = 3x - 5$$

- (2) m は、 ℓ を P を中心に 45° 回転させたもので、 $\tan \alpha = 3$ とおく。接点 B の x 座標を t とすると、接線 m の傾きは t であるから

$$\begin{aligned} t &= \tan(\alpha + 45^\circ) \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan 45^\circ}{1 - \tan \alpha \tan 45^\circ} \\ &= \frac{3 + 1}{1 - 3 \cdot 1} = -2 \end{aligned}$$



(3) (2) の結果から, m は点 $B\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ を通り, 傾き -2 の直線であるから

$$y - \frac{3}{2} = -2(x + 2) \quad \text{すなわち} \quad y = -2x - \frac{5}{2}$$

$$\ell, m \text{ を連立すると } \mathbf{P}\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$$

(4) 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} - \left(-2x - \frac{5}{2}\right) \right\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^3 \left\{ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} - (3x - 5) \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (x + 2)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^3 (x - 3)^2 dx \\ &= \frac{1}{6} \left[(x + 2)^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} \left[(x - 3)^3 \right]_{\frac{1}{2}}^3 = \frac{31}{8} \end{aligned}$$

■

3 (1) 余弦定理により $\cos B = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{9}{16}$

$$\frac{1}{2} < \frac{9}{16} < \frac{8\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{より} \quad \cos 60^\circ < \cos B < \cos 45^\circ$$

$$\cos B > 0 \quad \text{より, } \angle B \text{ は鋭角であるから} \quad 45^\circ < \angle B < 60^\circ$$

(2) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{8}, \quad \cos C = \frac{6^2 + 5^2 - 4^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{3}{4}$$

$$\cos 2C = 2 \cos^2 C - 1 = 2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8} = \cos A$$

$$\cos A > 0, \cos 2C > 0 \quad \text{より, } \angle A, \angle 2C \text{ は鋭角であるから} \quad \angle A = 2\angle C$$

(3) $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$ であるから, (2) の結果により

$$\angle B = 180^\circ - 3\angle C$$

これを (1) の結果に代入すると

$$45^\circ < 180^\circ - 3\angle C < 60^\circ \quad \text{ゆえに} \quad 40^\circ < \angle C < 45^\circ$$

■

- 4 (1) さいころを投げる回数が最大となるのは、偶数が2回、奇数が $N-1$ 回出た後にもう1回投げる回数であるから

$$2 + (N - 1) + 1 = N + 2 \text{ (回)}$$

- (2) 求める確率は、偶数の目が3回出る確率であるから $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

- (3) さいころを N 回投げて操作が終了するのは、次の (i), (ii) の場合である.

- (i) N 回とも奇数の目が出る場合で、その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N = \frac{1}{2^N}$$

- (ii) $N-1$ 回目までに偶数が2回出て、 N 回目に偶数が出る場合で、その確率は

$${}_{N-1}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(N-1)(N-2)}{2^{N+1}}$$

- (i), (ii) より、求める確率は

$$\frac{1}{2^N} + \frac{(N-1)(N-2)}{2^{N+1}} = \frac{N^2 - 3N + 4}{2^{N+1}}$$

- (4) 最後に奇数の目が出て操作が終了するのは、次の (i)~(iii) の場合である.

- (i) N 回とも奇数が出る場合で、その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N = \frac{1}{2^N}$$

- (ii) N 回目までに偶数が1回出て、 $N+1$ 回目に奇数が出る場合で、その確率は

$${}_NC_1 \left(\frac{1}{2}\right)^N \cdot \frac{1}{2} = \frac{N}{2^{N+1}}$$

- (iii) $N+1$ 回目までに偶数が2回出て、 $N+2$ 回目に奇数が出る場合で、その確率は

$${}_{N+1}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(N+1)N}{2^{N+3}}$$

- (i)~(iii) から、求める確率は

$$\frac{1}{2^N} + \frac{N}{2^{N+1}} + \frac{(N+1)N}{2^{N+3}} = \frac{N^2 + 5N + 8}{2^{N+3}}$$

(5) さいころを投げる回数を X とし ($3 \leq X \leq 6$), その確率を $P(X)$ とする.

(i) $X = 3$ のとき, (2) の結果から $P(3) = \frac{1}{8}$

(ii) $X = 4$ のとき, 4 回とも奇数の目が出るか, 3 回目までに偶数が 2 回出て, 4 回目に偶数が出る場合であるから, (3) に $n = 4$ を代入して

$$P(4) = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 4}{2^5} = \frac{1}{4}$$

(iii) $P(6)$ は, 5 回目までに偶数が 2 回, 奇数が 3 回出る確率に等しいから

$$P(6) = {}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}$$

(iv) (i)~(iii) より

$$\begin{aligned} P(5) &= 1 - \{P(3) + P(4) + P(6)\} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{16}\right) = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

よって, 求める期待値は

$$3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{5}{16} + 6 \cdot \frac{5}{16} = \frac{77}{16}$$

別解 n 回投げた時点で、偶数が j 回、奇数が k 回出ている確率を P_j^k とすると

$$P_j^k = \begin{cases} \frac{1}{2} (P_{j-1}^k + P_j^{k-1}) & (1 \leq j < 3, 1 \leq k < 4) \\ \frac{1}{2} P_{j-1}^k & (j = 3) \\ \frac{1}{2} P_j^{k-1} & (k = 4) \end{cases}$$

が成り立つ ($P_0^1 = \frac{1}{2}$, $P_1^0 = \frac{1}{2}$).

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
			$P_0^4 = \frac{1}{16}$		
		$P_0^3 = \frac{1}{8}$		$P_1^4 = \frac{1}{8}$	
	$P_0^2 = \frac{1}{4}$		$P_1^3 = \frac{1}{4}$		$P_2^4 = \frac{5}{32}$
$P_0^1 = \frac{1}{2}$		$P_1^2 = \frac{3}{8}$		$P_2^3 = \frac{5}{16}$	
	$P_1^1 = \frac{1}{2}$		$P_2^2 = \frac{3}{8}$		$P_3^3 = \frac{5}{32}$
$P_1^0 = \frac{1}{2}$		$P_2^1 = \frac{3}{8}$		$P_3^2 = \frac{3}{16}$	
	$P_2^0 = \frac{1}{4}$		$P_3^1 = \frac{3}{16}$		
		$P_3^0 = \frac{1}{8}$			

さいころを投げる回数が X である確率を $P(X)$ とすると、上の計算から

$$\begin{aligned} P(3) &= \frac{1}{8}, & P(4) &= \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4}, \\ P(5) &= \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16}, & P(6) &= \frac{5}{32} + \frac{5}{32} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

よって、求める期待値は

$$3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{5}{16} + 6 \cdot \frac{5}{16} = \frac{77}{16}$$



- 5** (1) 取り除いた2つの整数を $x, x+1$ とすると

$$\frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 18 - (2x+1) = \frac{42}{5} \times 15 \quad \text{これを解いて} \quad x = 13$$

よって、求める2数は **13, 14**

- (2) $n \geq 39$ のとき

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1) - 1 - 2(n-1)}{n-2} = \frac{1}{2}(n-1) \geq 19 > \frac{205}{11}$$

$$\text{よって} \quad \frac{1}{2}n(n+1) - 1 - 2(n-1) > \frac{205}{11}(n-2)$$

- (3) 連続する2つの整数を取り除いた、残された整数の総和を $n-2$ で割った値の最大値を A_M , 最小値を A_m とすると

$$A_M = \frac{\frac{1}{2}n(n+1) - 1 - 2}{n-2} = \frac{n+3}{2}$$

$$A_m = \frac{\frac{1}{2}n(n+1) - (n-1) - n}{n-2} = \frac{n-1}{2}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{n-1}{2} \leq \frac{205}{11} \leq \frac{n+3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 35 \leq n \leq 38$$

$n-2$ は11の倍数であるから **$n = 35$**

したがって、取り除いた2数を $x, x+1$ とすると

$$x + (x+1) = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 36 - \frac{205}{11} \cdot 33 \quad \text{これを解いて} \quad x = 7$$

よって、取り除いた2数は **7, 8**

