

平成22年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
 教育(第一類・第二類(技術・情報系)・第四類(人間生活系))・
 経済(昼)・歯(口腔健康科学(口腔保健))

問題 1 2 3 4 5

- 1 k は定数で、 $k > 0$ とする．曲線 $C: y = kx^2$ ($x \geq 0$) と2つの直線 $\ell: y = kx + \frac{1}{k}$,
 $m: y = -kx + \frac{1}{k}$ との交点の x 座標をそれぞれ α, β ($0 < \beta < \alpha$) とするとき、
 次の問いに答えよ．

- (1) $\alpha - \beta$ の値を求めよ．
- (2) $\alpha\beta, \alpha^2 + \beta^2$ および $\alpha^3 - \beta^3$ を k を用いて表せ．
- (3) 曲線 C と2直線 ℓ, m とで囲まれた部分の面積を最小にする k の値を求めよ．また、そのときの面積を求めよ．

- 2 座標平面上に点 $O(0, 0)$ と点 $P(4, 3)$ をとる．不等式 $(x - 5)^2 + (y - 10)^2 \leq 16$ の表す領域を D とする．次の問いに答えよ．

- (1) k は定数とする．直線 $y = -\frac{4}{3}x + k$ 上の点を Q とするとき、ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ と $\overrightarrow{OP}$ の内積 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP}$ を k を用いて表せ．
- (2) 点 R が D 全体を動くとき、ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OR}$ の内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR}$ の最大値および最小値を求めよ．

- 3 p, a を実数の定数とする．多項式 $P(x) = x^3 - (2p + a)x^2 + (2ap + 1)x - a$ を $x - 3$ で割った余りが $10 - 6p$ であり、3次方程式 $P(x) = 0$ の実数解は a のみとする．次の問いに答えよ．

- (1) 実数の範囲で $P(x)$ を因数分解せよ．
- (2) a の値を求めよ．
- (3) 関数 $y = P(x)$ が極値をもたないときの p の値を求めよ．

4 n は 2 以上の自然数とする. 袋の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている. この袋から無作為に玉を 1 個取り出し, それに書かれている数を自分の得点としたのち, 取り出した玉を袋に戻す. この試行を A, B, C の 3 人が順に行い, 3 人の中で最大の得点の人を勝者とする. たとえば, A, B, C の得点がそれぞれ 4, 2, 4 のときは A と C の 2 人が勝者であり, 3 人とも同じ得点のときは A, B, C の 3 人とも勝者である. 勝者が k 人 ($k = 1, 2, 3$) である確率を $P_n(k)$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ.
- (2) $n = 3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ.
- (3) 勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ.

5 次の問いに答えよ.

- (1) x, y が 4 で割ると 1 余る自然数ならば, 積 xy も 4 で割ると 1 余ることを証明せよ.
- (2) 0 以上の偶数 n に対して, 3^n を 4 で割ると 1 余ることを証明せよ.
- (3) 1 以上の奇数 n に対して, 3^n を 4 で割った余りが 1 でないことを証明せよ.
- (4) m を 0 以上の整数とする. 3^{2m} の正の約数のうち 4 で割ると 1 余る数全体の和を m を用いて表せ.

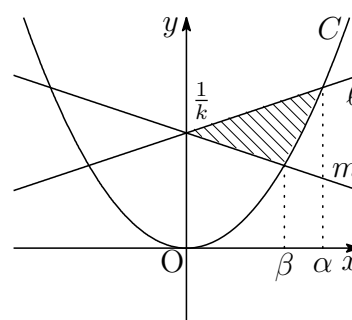
解答例

- 1 (1) C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$kx^2 - kx - \frac{1}{k} = 0$$

α ($\alpha > 0$) はこの方程式の解であるから,
 $k > 0$ に注意して

$$\alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2k}$$



C と m の方程式から y を消去すると $kx^2 + kx - \frac{1}{k} = 0$

β ($\beta > 0$) はこの方程式の解であるから, $k > 0$ に注意して

$$\beta = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4}}{2k}$$

$$\text{よって} \quad \alpha - \beta = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2k} - \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4}}{2k} = 1$$

- (2) (1) の結果を利用して

$$\alpha\beta = \frac{(\sqrt{k^2 + 4} + k)(\sqrt{k^2 + 4} - k)}{2k \cdot 2k} = \frac{1}{k^2},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta = 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{2}{k^2},$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) = 1^3 + 3 \cdot \frac{1}{k^2} \cdot 1 = 1 + \frac{3}{k^2}$$

- (3) 曲線 C と 2 直線 ℓ , m で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha \left(kx + \frac{1}{k}\right) dx - \int_0^\beta \left(-kx + \frac{1}{k}\right) dx - \int_\beta^\alpha kx^2 dx \\ &= \left[\frac{kx^2}{2} + \frac{x}{k}\right]_0^\alpha - \left[-\frac{kx^2}{2} + \frac{x}{k}\right]_0^\beta - \left[\frac{kx^3}{3}\right]_\beta^\alpha \\ &= \frac{k(\alpha^2 + \beta^2)}{2} + \frac{\alpha - \beta}{k} - \frac{k(\alpha^3 - \beta^3)}{3} \\ &= \frac{k}{2} \left(1 + \frac{2}{k^2}\right) + \frac{1}{k} - \frac{k}{3} \left(1 + \frac{3}{k^2}\right) = \frac{k}{6} + \frac{1}{k} \end{aligned}$$

相加・相乗平均の大小関係により $\frac{k}{6} + \frac{1}{k} \geq 2\sqrt{\frac{k}{6} \cdot \frac{1}{k}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

上式で等号が成立するとき $\frac{k}{6} = \frac{1}{k}$, すなわち, $k = \sqrt{6}$

よって, $k = \sqrt{6}$ のとき, S は最小値 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ をとる. ■

2 (1) $P(4, 3)$ より $\overrightarrow{OP} = (4, 3)$

直線 $y = -\frac{4}{3}x + k$ 上の点を $Q\left(t, -\frac{4}{3}t + k\right)$ とすると

$$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} = 4t + 3\left(-\frac{4}{3}t + k\right) = 3k$$

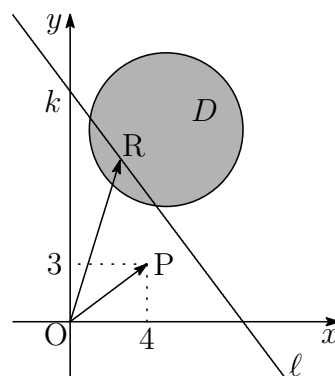
(2) 点 $(0, k)$ を通り、傾き $-\frac{4}{3}$ の直線を ℓ とすると

$$4x + 3y - 3k = 0$$

ℓ 上の任意の点 R について、(1) の結果から

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} = 3k$$

$D : (x - 5)^2 + (y - 10)^2 \leq 16$ と ℓ が共有点をもつとき



$$\frac{|4 \cdot 5 + 3 \cdot 10 - 3k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \leq 4 \quad \text{ゆえに} \quad 30 \leq 3k \leq 70$$

したがって $30 \leq \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} \leq 70$

よって、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR}$ は最大値 **70**，最小値 **30** をとる。 ■

- 3** (1) 多項式 $P(x) = x^3 - (2p + a)x^2 + (2ap + 1)x - a$
 3 次方程式 $P(x) = 0$ は、実数解 a をもつから $P(a) = 0$
 因数定理により、 $P(x)$ は $x - a$ を因数にもつから

$$P(x) = (x - a)(x^2 - 2px + 1)$$

- (2) $P(x)$ を $x - 3$ で割った余りが $10 - 6p$ であるから、剰余の定理により

$$P(3) = 10 - 6p \quad \text{ゆえに} \quad 6ap - 10a - 18p + 30 = 10 - 6p$$

$$\text{したがって} \quad (a - 2)(3p - 5) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

3 次方程式 $P(x) = 0$ の実数解は a のみであるから、(1) の結果より

$$x^2 - 2px + 1 = 0$$

は実数解をもたないから、係数について

$$D/4 = (-p)^2 - 1 \cdot 1 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad -1 < p < 1$$

上式および $\textcircled{1}$ から $\mathbf{a = 2}$

- (3) $P(x) = (x - 2)(x^2 - 2px + 1)$ であるから

$$P'(x) = 3x^2 - 2(2p + 2)x + 4p + 1$$

$y = P(x)$ が極値をもたないから、 $P'(x)$ の係数について

$$(2p + 2)^2 - 3(4p + 1) \leq 0$$

$$\text{したがって} \quad (2p - 1)^2 \leq 0 \quad \text{よって} \quad \mathbf{p = \frac{1}{2}}$$

別解 $P'(x) = (x - 1)(3x - 4p - 1)$ であるから

$$1 = \frac{4p + 1}{3} \quad \text{よって} \quad \mathbf{p = \frac{1}{2}}$$



- 4 (1) 勝者が3人であるのは、3人とも同じ数字の玉を取り出したときで、 n 通りであるから

$$P_n(3) = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

- (2) 勝者2人の選び方は ${}_3C_2$ 通りで、勝者と敗者の数字の選び方は ${}_3C_2$ 通りであるから

$$P_3(2) = \frac{{}_3C_2 \cdot {}_3C_2}{3^3} = \frac{1}{3}$$

- (3) 勝者2人の選び方は ${}_3C_2$ 通りで、勝者と敗者の数字の選び方は ${}_nC_2$ 通りであるから

$$P_n(2) = \frac{{}_3C_2 \cdot {}_nC_2}{n^3} = \frac{3(n-1)}{2n^2}$$

$P_n(1) + P_n(2) + P_n(3) = 1$ であるから

$$\begin{aligned} P_n(1) &= 1 - P_n(2) - P_n(3) = 1 - \frac{3(n-1)}{2n^2} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{2n^2 - 3n + 1}{2n^2} = \frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2} \end{aligned}$$

別解 勝者1人の選び方は ${}_3C_1$ 通りで、勝者が数字 k ($2 \leq k \leq n$)を選ぶ確率は $\frac{1}{n}$ で、2人の敗者が $k-1$ 以下の数字を選ぶ確率は $\frac{(k-1)^2}{n^2}$ であるから

$$\begin{aligned} P_n(1) &= {}_3C_1 \sum_{k=2}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{3}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) = \frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2} \end{aligned}$$

■

- 5** (1) $x \equiv 1, y \equiv 1 \pmod{4} \implies xy \equiv 1 \pmod{4}$
 (2) n が 0 以上の偶数であるから, 3^n は自然数.

$$3^n \equiv (-1)^n \equiv 1 \pmod{4}$$

よって, 3^n (n は 0 以上の偶数) を 4 で割ると 1 余る.

- (3) n が 1 以上の奇数であるから, 3^n は自然数.

$$3^n \equiv (-1)^n \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$$

よって, 3^n (n は 1 以上の奇数) を 4 で割ると 3 余る.

- (4) (2),(3) の結果から

$$\sum_{k=0}^m 3^{2k} = \frac{3^{2(m+1)} - 1}{9 - 1} = \frac{3^{2m+2} - 1}{8}$$

