

平成 20 年度 広島大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
 教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・
 経済 (昼)・歯 (口腔健康科学 (口腔保健))

問題 1 2 3 4 5

1 3 次関数

$$y = x^3 - cx$$

のグラフを考える. ただし, c は定数とする. そして, 2 点 P, Q が, 次の条件を満たしながら, このグラフ上全体を動くものとする.

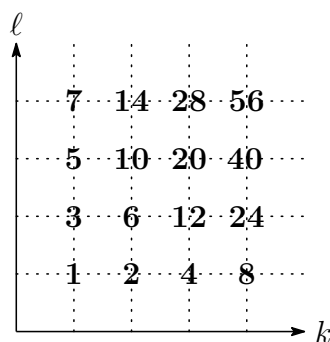
(条件) P の x 座標は Q の x 座標より 1 だけ小さい.

このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 線分 PQ の傾きが最小になるときの点 P の x 座標と, 傾きの最小値を求めよ.
- (2) 線分 PQ の傾きが 0 となる点 P が存在するような, c の値の範囲を求めよ.
- (3) 線分 PQ の中点の x 座標と同じ x 座標をもつグラフ上の点を R とする. 点 R におけるグラフの接線の傾きは, 線分 PQ の傾きより常に小さいことを示せ.

2 k, ℓ を自然数とし, 座標平面上の点 (k, ℓ) に数 $2^{k-1}(2\ell - 1)$ を記入する (下図を参照). このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 点 $(2, 25)$ に記入される数を求めよ.
- (2) 2008 が記入される点の座標を求めよ.
- (3) どの自然数も座標平面上のどこかの点に 1 回だけ記入される. その理由を書け.



- 3** 2点 A, B と, その上を動く 1 個の石を考える. この石は, 時刻 $t = 0$ で点 A にあり, その後, 次の規則 (a), (b) にしたがって動く.

各 $t = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

- (a) 時刻 t に石が点 A にあれば, 時刻 $t + 1$ に石が点 A にある確率は $\frac{1}{3}$, 点 B にある確率は $\frac{2}{3}$ である.
- (b) 時刻 t に石が点 B にあれば, 時刻 $t + 1$ に石が点 B にある確率は $\frac{1}{3}$, 点 A にある確率は $\frac{2}{3}$ である.

いま, n を自然数とし, 時刻 $t = n$ において石が点 A にある確率を p_n とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) p_1 を求めよ.
- (2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ.
- (3) p_n を求めよ.

- 4** $x_1 = x_2 = 1$ とし, x_n ($n = 3, 4, \dots$) は x_{n-2} と x_{n-1} の和を 3 で割ったときの余りであるとして, 数列 $\{x_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) を定める. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 数列 $\{x_n\}$ の第 3 項から第 12 項までのそれぞれの値を, 解答用紙にある表の中に書け.
- (2) x_{346} を求めよ.
- (3) $S_m = \sum_{n=1}^m x_n$ とおくとき, $S_m \geq 684$ を満たす最小の自然数 m を求めよ.

- 5** 三角形 OAB において, OA を $t : (1 - t)$ に内分する点を M, OB を $t : (1 - t)$ に内分する点を N とする. ただし, t は $0 < t < 1$ の範囲を動く. そして, 線分 AN と BM の交点を P とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\overrightarrow{MN}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および t を用いて表し, $\overrightarrow{MN}$ と $\overrightarrow{AB}$ が平行であることを示せ.
- (2) $t = \frac{BM}{BP}$ とするとき, s を t を用いて表し, s のとりうる値の範囲を求めよ.
- (3) 三角形 AMP と三角形 OAB の面積比 $r = \frac{\triangle AMP}{\triangle OAB}$ を (2) の s を用いて表し, r の最大値を求めよ.

解答例

- 1 (1) $f(x) = x^3 - cx$ とおき, $P(p, f(p)), Q(q, f(q))$ とする.

線分 PQ の傾きを m_1 とすると

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{f(q) - f(p)}{q - p} = \frac{(q^3 - cq) - (p^3 - cp)}{q - p} \\ &= \frac{(q - p)^3 + 3pq(q - p) - c(q - p)}{q - p} \\ &= (q - p)^2 + 3pq - c \end{aligned}$$

条件より, $q = p + 1$ であるから

$$m_1 = 1 + 3p(p + 1) - c = 3 \left(p + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} - c \quad \cdots \textcircled{1}$$

よって, 点 P の x 座標が $-\frac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\frac{1}{4} - c$ をとる.

- (2) (1) で求めた最小値が 0 以下であればよいから

$$\frac{1}{4} - c \leq 0 \quad \text{よって} \quad c \geq \frac{1}{4}$$

- (3) $f(x) = x^3 - cx$ を微分すると $f'(x) = 3x^2 - c$

点 $R(r, f(r))$ におけるグラフの接線の傾きを m_2 とすると

$$m_2 = f'(r) = 3r^2 - c \quad \cdots \textcircled{2}$$

このとき, $r = p + \frac{1}{2}$ であるから, ①, ② より

$$m_2 - m_1 = 3r^2 - c - \left\{ 3 \left(p + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} - c \right\} = -\frac{1}{4} < 0$$

したがって $m_2 < m_1$ よって, 題意は成立する. ■

- 2** (1) 点 (2, 25) に記入される数は $2^{2-1}(2 \cdot 25 - 1) = 98$
 (2) $2008 = 2^3 \cdot 251 = 2^{4-1}(2 \cdot 126 - 1)$ よって 点 **(4, 126)**
 (3) 任意の自然数は, $2^{k-1} \times (\text{奇数})$ とかける (k は自然数). このとき, 自然数 ℓ を用いて, $(\text{奇数}) = 2\ell - 1$ とすると, 任意の自然数は

$$2^{k-1}(2\ell - 1)$$

と一意的に表される. 実際, $(k, \ell) \neq (k', \ell')$ について

$$2^{k-1}(2\ell - 1) = 2^{k'-1}(2\ell' - 1)$$

と仮定すると, $k = k'$ のとき, 上式より $\ell = \ell'$ となり, 不適.
 一般性を失うことなく, $k > k'$ とすると

$$2^{k-k'}(2\ell - 1) = 2\ell' - 1$$

上式の左辺は偶数, 右辺は奇数となり, 不適.

よって, 任意の自然数は, 自然数 k, ℓ を用いて一意的に

$$2^{k-1}(2\ell - 1)$$

と表される. ■

- 3** (1) 与えられた規則から

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}(1 - p_n) \quad \text{ゆえに} \quad p_{n+1} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3} \quad \cdots (*)$$

$$(*) \text{ に } n = 0 \text{ を代入すると } p_1 = -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$(2) (*) \text{ より } p_{n+1} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}$$

$$(3) (*) \text{ より } p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \left(p_n - \frac{1}{2} \right)$$

よって, $\left\{ p_n - \frac{1}{2} \right\}$ は初項 $p_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \quad \text{よって} \quad p_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$
■

- 4 (1) $\{x_n\}$ の規則により

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_n	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0

- (2) (1) の結果から, n を自然数とすると $x_n = x_{n+8}$

$$346 = 8 \cdot 43 + 2 \text{ であるから } x_{346} = x_2 = 1$$

- (3) $x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 9$, $684 = 9 \times 76$, $8 \times 76 = 608$ より

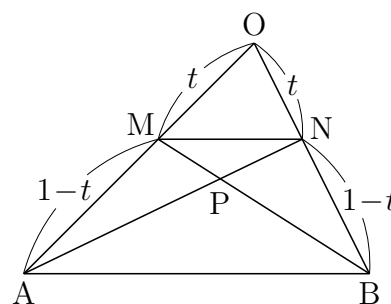
$$\sum_{n=1}^{608} x_n = 684$$

ここで, $x_{608} = x_8 = 0$, $x_{607} = x_7 = 1 \neq 0$ であることに注意すると, 求める最小の自然数 m は **$m = 607$** ■

- 5 (1) $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{ON} = t\overrightarrow{OB}$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OB} - t\overrightarrow{OA} \\ &= t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ より $\overrightarrow{MN} = t\overrightarrow{AB}$
よって, $\overrightarrow{MN}$ と $\overrightarrow{AB}$ は平行である.



- (2) $AB \parallel MN$ であるから, $\triangle PAB \sim \triangle PNM$ であり, その相似比は, $1:t$ であるから

$$s = \frac{BM}{BP} = \frac{BP + PM}{BP} = \frac{1+t}{1} = 1+t$$

$$0 < t < 1 \text{ より } 1 < s < 2$$

- (3) $\frac{\triangle AMP}{\triangle ABM} = \frac{t}{1+t}$, $\frac{\triangle ABM}{\triangle OAB} = (1-t)$ であるから, $t = s-1$ により

$$r = \frac{\triangle AMP}{\triangle OAB} = \frac{t(1-t)}{1+t} = \frac{(s-1)\{1-(s-1)\}}{1+(s-1)} = 3 - \left(s + \frac{2}{s}\right)$$

相加平均・相乗平均の大小関係により $s + \frac{2}{s} \geq 2\sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{1}$

①において, 等号が成立するとき $s = \frac{2}{s}$ すなわち $s = \sqrt{2}$

したがって $r \leq 3 - 2\sqrt{2}$ よって, r の最大値は **$3 - 2\sqrt{2}$** ■