

平成17年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
 教育(第一類・第二類(技術・情報系)・第四類(人間生活系))・
 経済(昼)・歯(口腔健康科学(口腔保健))

問題 1 2 3 4 5

1 次の問いに答えよ.

(1) $P(x)$ は, x^3 の係数が1であるような3次式とする. $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ったときの余りは $x+1$ であり, $(x-1)^2$ で割ったときの余りは $x+c$ である. ただし, c は定数である. このとき, c の値と $P(x)$ を求めよ.

(2) 正の実数 x, y が $xy = 100$ を満たすとき,

$$(\log_{10} x)^3 + (\log_{10} y)^3$$

の最小値と, そのときの x と y の値を求めよ.

2 2つの円

$$(*) \quad x^2 + y^2 + (2\sqrt{2}\sin\theta)x - \frac{\sqrt{17}}{2}y + \sin^2\theta + \frac{17}{16} = 0$$

$$(**) \quad x^2 + y^2 = \frac{9}{16}$$

について, 次の問いに答えよ. ただし, $0^\circ < \theta < 180^\circ$ とする.

(1) 円 $(*)$ の半径と中心の座標を θ を用いて表せ.

(2) 円 $(*)$ と円 $(**)$ が共有点をもたないような θ の値の範囲を求めよ.

3 三角形 OAB において, $OA = 5$, $OB = 6$, $AB = 4$ とする. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおき, 点 P を

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

で定める. 次の問いに答えよ.

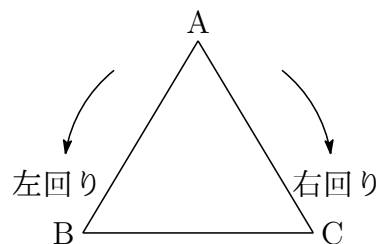
(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ.

(2) 点 P から辺 OA に垂線を下ろし, OA との交点を E とする. $\overrightarrow{OE} = k\vec{a}$ を満たす実数 k の値を求めよ.

(3) 線分 PE の長さを求めよ.

- 4 1枚のコインを1回投げて、三角形ABCの1つの頂点にある駒を、

表が出たとき、左回りで隣の頂点に移し、
裏が出たとき、右回りで隣の頂点に移す



という試行を考える。初めに駒を頂点Aに置く。次の問いに答えよ。

- (1) この試行を2回繰り返したとき、駒が頂点Aにある確率 P_2 を求めよ。
- (2) この試行を3回繰り返したとき、駒が頂点Aにある確率 P_3 を求めよ。
- (3) この試行を4回繰り返したときに、駒が頂点Aに初めてもどってくる確率 Q_4 を求めよ。
- (4) この試行を n 回 ($n \geq 2$) 繰り返したときに、駒が頂点Aに初めてもどってくる確率 Q_n を求めよ。

- 5 各実数 t に対して、方程式

$$y = (2t - 3)x - t^2$$

で表される直線 L_t を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 L_t と L_s が直交するとき、 L_t と L_s の交点の y 座標は、 t と s によらない定数になることを示せ。
- (2) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ にすべての直線 L_t が接するとき、定数 a, b, c の値を求めよ。
- (3) (2) で求めた放物線と2つの直線 L_t, L_{t+2} によって囲まれる図形の面積は、 t によらない定数になることを示せ。

解答例

- 1** (1) x^3 の係数が 1 である $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った商を $x+k$ とおくと

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)^2(x+k) + x+1 \\ &= x^3 + (k+2)x^2 + (2k+2)x + k+1 \end{aligned}$$

$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ると

$$P(x) = (x-1)^2(x+k+4) + (4k+9)x - 3$$

条件より係数を比較して $4k+9=1$, $c=-3$

これを解いて $k=-2$ よって $P(x) = x^3 - 2x - 1$

- (2) $xy=100$ より $(x>0, y>0)$, $X=\log_{10} x$, $Y=\log_{10} y$ とおくと

$$\log_{10} x + \log_{10} y = 2 \quad \text{ゆえに} \quad X+Y=2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

したがって

$$\begin{aligned} (\log_{10} x)^3 + (\log_{10} y)^3 &= X^3 + Y^3 = (X+Y)(X^2 - XY + Y^2) \\ &= 2(X^2 - XY + Y^2) \\ &= 2\{X^2 - X(2-X) + (2-X)^2\} \\ &= 6(X-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

① より, $X=Y=1$ すなわち, $x=y=10$ のとき最小値 **2** ■

- 2** (1) (*) を変形すると ($0^\circ < \theta < 180^\circ$)

$$(x + \sqrt{2} \sin \theta)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2 = \sin^2 \theta$$

よって 半径 $\sin \theta$, 中心 $\left(-\sqrt{2} \sin \theta, \frac{\sqrt{17}}{4}\right)$

- (2) 2円 (*) と (**) の中心間の距離を d とすると

$$d = \sqrt{2 \sin^2 \theta + \frac{17}{16}}$$

(*), (**) の半径をそれぞれ R, r とすると,

$$R = \sin \theta, \quad r = \frac{3}{4}$$

2円が共有点をもたないのは, 次の (i), (ii) の場合である.

- (i) $d > R + r$ のとき

$$\sqrt{2 \sin^2 \theta + \frac{17}{16}} > \sin \theta + \frac{3}{4} \quad \text{整理すると} \quad 2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta + 1 > 0$$

$$(2 \sin \theta - 1)(\sin \theta - 1) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \sin \theta < \frac{1}{2}$$

これを解いて $0^\circ < \theta < 30^\circ, 150^\circ < \theta < 180^\circ$

- (ii) $d < |R - r|$ のとき

$$\sqrt{2 \sin^2 \theta + \frac{17}{16}} < \left| \sin \theta - \frac{3}{4} \right| \quad \text{整理すると} \quad 2 \sin^2 \theta + 3 \sin \theta + 1 < 0$$

$\sin \theta > 0$ より, これを満たす θ は存在しない.

- (i), (ii) より, 求める θ の値の範囲は

$$0^\circ < \theta < 30^\circ, 150^\circ < \theta < 180^\circ$$



3 (1) $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2$ より

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2$$

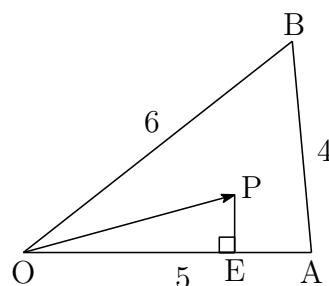
$$|\overrightarrow{OA}| = 5, |\overrightarrow{OB}| = 6, |\overrightarrow{AB}| = 4, \vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB} \text{ より}$$

$$4^2 = 6^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 5^2 \quad \text{これを解いて} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{45}{2}$$

(2) $\overrightarrow{OE} = \frac{(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{a})}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$ より $k = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{a} = \left(\frac{2}{5} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \right) \cdot \vec{a} = \frac{2}{5} |\vec{a}|^2 + \frac{1}{3} \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{45}{2} \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$



(3) (2) の結果から

$$\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OP} = \frac{7}{10} \vec{a} - \left(\frac{2}{5} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \right) = \frac{3}{10} \vec{a} - \frac{1}{3} \vec{b}$$

したがって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PE}|^2 &= \frac{9}{100} |\vec{a}|^2 - \frac{1}{5} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{9} |\vec{b}|^2 \\ &= \frac{9}{100} \cdot 5^2 - \frac{1}{5} \cdot \frac{45}{2} + \frac{1}{9} \cdot 6^2 = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

よって $PE = |\overrightarrow{PE}| = \frac{\sqrt{7}}{2}$



- 4 (1) 駒の移動とそのときの確率は

$$A \xrightarrow{\frac{1}{2}} B \xrightarrow{\frac{1}{2}} A, \quad A \xrightarrow{\frac{1}{2}} C \xrightarrow{\frac{1}{2}} A$$

よって、求める確率 P_2 は

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- (2) B または C の位置にあることを $\overline{A}$ とすると、駒の移動とその確率は

$$A \xrightarrow{1} \overline{A} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \overline{A} \xrightarrow{\frac{1}{2}} A$$

よって、求める確率 P_3 は

$$P_3 = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- (3) (2) と同様に、駒の移動とその確率は

$$A \xrightarrow{1} \overline{A} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \overline{A} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \overline{A} \xrightarrow{\frac{1}{2}} A$$

よって、求める確率 Q_4 は

$$Q_4 = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

- (4) (2), (3) と同様に、駒の移動とその確率は

$$A \xrightarrow{1} \overline{A} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \overbrace{\dots}^{n-2 \text{ 個}} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \overline{A} \xrightarrow{\frac{1}{2}} A$$

よって、求める確率 Q_n は

$$Q_n = 1 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$



- 5** (1) L_t, L_s の傾きは、それぞれ $2t - 3, 2s - 3$ で、 $L_t \perp L_s$ により

$$(2t - 3)(2s - 3) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad 2ts - 3t - 3s = -5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$L_t : y = (2t - 3)x - t^2$ と $L_s : y = (2s - 3)x - s^2$ を連立すると

$$(2t - 3)x - t^2 = (2s - 3)x - s^2 \quad \text{整理すると} \quad (t - s)(2x - t - s) = 0$$

このとき、 $t \neq s$ であるから $x = \frac{t + s}{2} \quad \dots \textcircled{2}$

したがって、 L_t と L_s の交点の y 座標は、 $\textcircled{1}$ に注意して

$$y = (2t - 3) \cdot \frac{t + s}{2} - t^2 = \frac{2ts - 3t - 3s}{2} = -\frac{5}{2}$$

よって、題意は成立する.

- (2) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と $L_t : y = (2t - 3)x - t^2$ の方程式から y を消去し、 x について整理すると

$$ax^2 + (b - 2t + 3)x + c + t^2 = 0$$

このとき、この x に関する 2 次方程式は重解をもつから、係数について

$$(b - 2t + 3)^2 - 4a(c + t^2) = 0$$

これを t について整理すると

$$4(1 - a)t^2 - 4(b + 3)t + (b + 3)^2 - 4ac = 0$$

上式は、任意の t について成立するから

$$4(1 - a) = 0, \quad -4(b + 3) = 0, \quad (b + 3)^2 - 4ac = 0$$

これを解くと $\mathbf{a = 1, \quad b = -3, \quad c = 0}$

(3) (2) の結果から，放物線の方程式は $y = x^2 - 3x$

放物線 $y = x^2 - 3x$ と直線 $L_t: y = (2t - 3)x - t^2$ の接点の x 座標は

$$x^2 - 3x = (2t - 3)x - t^2 \quad \text{ゆえに} \quad (x - t)^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = t$$

同様に，放物線 $y = x^2 - 3x$ と直線 L_s の接点の x 座標は $x = s$

$s = t + 2$ とすると， L_t と L_{t+2} の交点の x 座標は ② より $x = t + 1$

$$x^2 - 3x - \{(2t - 3)x - t^2\} = (x - t)^2$$

$$x^2 - 3x - \{(2s - 3)x - s^2\} = (x - s)^2 = (x - t - 2)^2$$

したがって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_t^{t+1} (x - t)^2 dx + \int_{t+1}^{t+2} (x - t - 2)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - t)^3 \right]_t^{t+1} + \left[\frac{1}{3}(x - t - 2)^3 \right]_{t+1}^{t+2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

よって，題意は成立する．

