

平成15年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
 教育(第一類・第二類(技術・情報系)・第四類(人間生活系))・
 経済(昼)・歯(口腔健康科学(口腔保健))

問題 1 2 3 4 5

1 2次関数 $y = 3ax^2 - 2(b+1)x + b+1$ のグラフ F について、次の問いに答えよ。

- (1) a, b をともに1から6までの整数とすると、 F と x 軸との共有点の個数がただ1つであるような定数 a, b の値の組をすべて求めよ。
- (2) さいころを続けて2回投げ、定数 a, b の値を1回目に出た目の数を a , 2回目に出た目の数を b と決める。このとき、 F と x 軸との共有点の個数の期待値 E を求めよ。

2 三角形 ABC において、辺 BC を $2:1$ の比に内分する点を M とする。辺 AB , AC をそれぞれ B, C の側に延長した半直線を l, m とし、 M を通る直線 k と l, m との交点をそれぞれ P, Q とする。

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \quad \overrightarrow{AP} = p\vec{b}, \quad \overrightarrow{AQ} = q\vec{c}$$

とおくとき、次の問いに答えよ。ただし、 p, q は正の実数とする。

- (1) $\overrightarrow{AM}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ で表せ。
- (2) $\frac{1}{p} + \frac{2}{q} = 3$ が成り立つことを示せ。
- (3) Q から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB との交点を H とするとき、 $\overrightarrow{QH}$ を $\vec{b}, \vec{c}, q$ で表せ。
- (4) M を通る直線 k が半直線 l, m と点 A 以外でそれぞれ交わるように変わるとき、三角形 APQ の面積を最小にする p, q の値を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

- (1) a, b, c, d を正の整数とする。 $(a + b\sqrt{2})^2 = (c + d\sqrt{2})^2$ ならば、 $a = c, b = d$ であることを示せ。ただし、 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いてよい。
- (2) 次の2つの数 r, s はそれぞれ、 a, b を正の整数として、 $(a + b\sqrt{2})^2$ と表すことができるか。表すことができれば、 a, b の値を求めよ。表すことができないならば、その理由を示せ。

$$r = 967 + 384\sqrt{2}, \quad s = 2107 + 1470\sqrt{2}$$

4 次の問いに答えよ.

- (1) a を 0 でない実数とするとき, 2 つの曲線 $y = -x^2 + 2x$ と $y = -ax^2 + 1$ が $0 \leq x \leq 2$ の範囲で 2 つの交点をもつように a の範囲を定めよ.
- (2) a_0 を (1) で求めた a の範囲の最大値とするとき, 定積分

$$I = \int_0^2 |(-a_0x^2 + 1) - (-x^2 + 2x)| dx$$

を求めよ.

5 不等式

$$\log_a b + \log_a (k - b) > 2$$

を満たす実数 a, b について, 次の問いに答えよ. ただし, k は $k > 2$ を満たす定数とする.

- (1) 点 (a, b) 全体の集合を ab 平面上に図示せよ.
- (2) $a + b$ がとる値の範囲を求めよ.

解答例

1 (1) $F: y = 3ax^2 - 2(b+1)x + b+1$ より

$$\begin{aligned} y &= 3a \left(x - \frac{b+1}{3a} \right)^2 - \frac{(b+1)^2}{3a} + b+1 \\ &= 3a \left(x - \frac{b+1}{3a} \right)^2 + \frac{(b+1)(3a-b-1)}{3a} \end{aligned} \quad (*)$$

a, b は 1 から 6 までの整数であるから、 F と x 軸との共有点の個数が 1 つである条件は

$$3a - b - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = 3a - 1$$

よって $(a, b) = (1, 2), (2, 5)$

(2) F が x 軸と異なる 2 点を共有する条件は

$$3a - b - 1 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad b > 3a - 1$$

これを満たす (a, b) は、次の 5 組である.

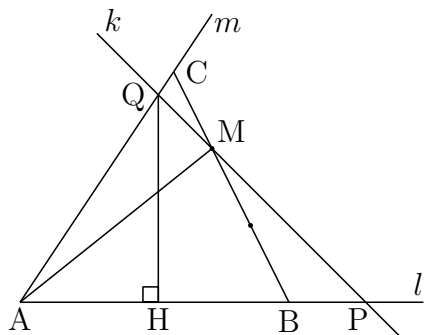
$$(a, b) = (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 6)$$

よって、求める期待値 E は

$$E = 0 \times \left(1 - \frac{2}{36} - \frac{5}{36} \right) + 1 \times \frac{2}{36} + 2 \times \frac{5}{36} = \frac{1}{3}$$



- 2 (1) M は辺 BC を 2 : 1 に内分する点であるから $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$



- (2) $\overrightarrow{AP} = p\vec{b}$, $\overrightarrow{AQ} = q\vec{c}$ より

$$\vec{b} = \frac{1}{p}\overrightarrow{AP}, \quad \vec{c} = \frac{1}{q}\overrightarrow{AQ}$$

これらを (1) の結果に代入すると

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3p}\overrightarrow{AP} + \frac{2}{3q}\overrightarrow{AQ}$$

M は線分 PQ 上の点であるから

$$\frac{1}{3p} + \frac{2}{3q} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{p} + \frac{2}{q} = 3$$

- (3) $\overrightarrow{AH} = \frac{(\overrightarrow{AQ} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{q(\vec{b} \cdot \vec{c})}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ より

$$\overrightarrow{QH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AQ} = \frac{q(\vec{b} \cdot \vec{c})}{|\vec{b}|^2} \vec{b} - q\vec{c}$$

- (4) $\triangle APQ = pq\triangle ABC$ であるから, pq を最小にする p, q の値を求めればよい. (2) の結果および相加平均・相乗平均の大小関係により

$$3 = \frac{1}{p} + \frac{2}{q} \geq 2\sqrt{\frac{1}{p} \cdot \frac{2}{q}} \quad \text{ゆえに} \quad pq \geq \frac{8}{9}$$

$\frac{1}{p} = \frac{2}{q}$ のとき, pq は最小となる. このとき, (2) の結果から

$$\frac{1}{p} = \frac{2}{q} = \frac{3}{2} \quad \text{よって} \quad p = \frac{2}{3}, \quad q = \frac{4}{3}$$



3 (1) a, b, c, d は正の整数で, $(a + b\sqrt{2})^2 = (c + d\sqrt{2})^2$ より

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad a - c = (d - b)\sqrt{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$d - b \neq 0 \text{ と仮定すると } \frac{a - c}{d - b} = \sqrt{2}$$

①の左辺は有理数, 右辺が無理数となり矛盾.

したがって $d - b = 0$ ゆえに $a - c = 0$ よって $a = c, b = d$

$$(2) \quad (a + b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$$

$r = 967 + 384\sqrt{2}$ について, $r = (a + b\sqrt{2})^2$ を満たす正の整数 a, b が存在すると仮定すると

$$(*) \quad a^2 + 2b^2 = 967, \quad ab = 192 = 3 \cdot 2^6$$

(*) の第1式より a は奇数であるから, 第2式より

$$(a, b) = (1, 192), (3, 64)$$

これらは, (*) の第1式を満たさない.

よって, $r = (a + b\sqrt{2})^2$ となる, 正の整数 a, b は存在しない.

次に $s = 2107 + 1470\sqrt{2}$ について, $s = (a + b\sqrt{2})^2$ を満たす正の整数 a, b が存在すると仮定すると

$$(**) \quad a^2 + 2b^2 = 7^2 \cdot 43, \quad ab = 735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

(**) の第2式から, a または b の少なくとも1つは7の倍数である. このとき, a が7の倍数であると仮定すると, (**) の第1式より, b も7の倍数である. また, b が7の倍数であると仮定しても, 同様に a も7の倍数である. $a = 7p, b = 7q$ とおいて, (**) に代入すると

$$p^2 + 2q^2 = 43, \quad pq = 3 \cdot 5$$

これを満たす整数 p, q は $(p, q) = (5, 3)$

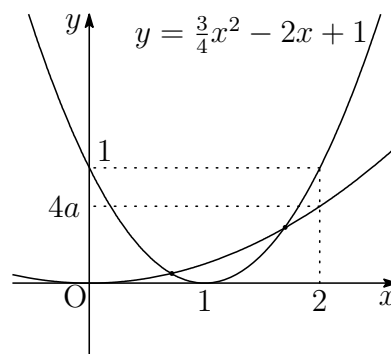
よって $(a, b) = (35, 21)$ ■

- 4 (1) $y = -x^2 + 2x$ と $y = -ax^2 + 1$ から y を消去すると

$$-x^2 + 2x = -ax^2 + 1$$

$$\text{ゆえに } ax^2 = (x-1)^2$$

与えられた2曲線が $0 \leq x \leq 2$ の範囲で2つの交点をもつとき、2つの放物線 $y = ax^2$ と $y = (x-1)^2$ がこの範囲で2つの交点をもつから

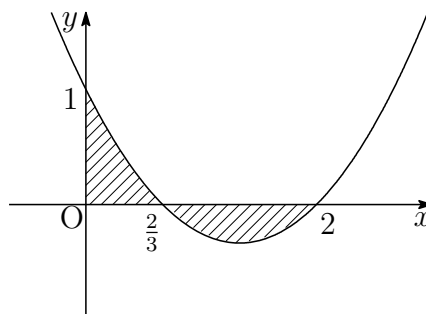


$$0 < 4a \leq 1 \quad \text{よって} \quad 0 < a \leq \frac{1}{4}$$

- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left\{ \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) - (-x^2 + 2x) \right\} dx \\ &= \int_0^2 \left| \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1 \right| dx = \frac{3}{4} \int_0^2 \left| \left(x - \frac{2}{3} \right) (x - 2) \right| dx \end{aligned}$$

I は、下の図の斜線部分の面積である。



$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{4}x^2 - 2x + 1 \right) dx + \frac{3}{4} \int_{\frac{2}{3}}^2 \left(x - \frac{2}{3} \right) (2 - x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^3 - x^2 + x \right]_0^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \left(2 - \frac{2}{3} \right)^3 = \frac{16}{27} \end{aligned}$$

■

5 (1) 不等式 $\log_a b + \log_a (k - b) > 2$ より $\log_a b(k - b) > \log_a a^2$

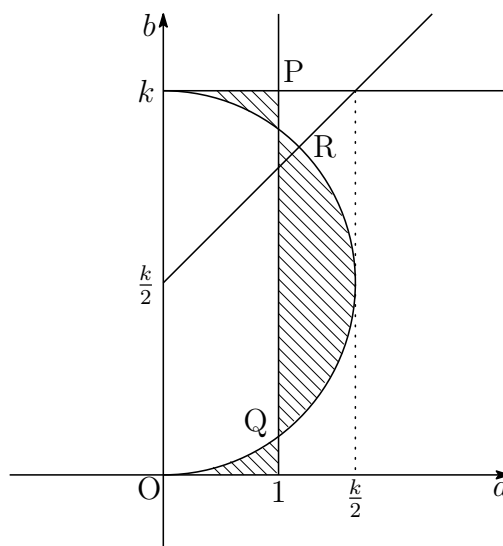
(i) $0 < a < 1$ のとき

$$b(k - b) < a^2 \quad \text{すなわち} \quad a^2 + \left(b - \frac{k}{2}\right)^2 > \frac{k^2}{4}$$

(ii) $1 < a$ のとき

$$b(k - b) > a^2 \quad \text{すなわち} \quad a^2 + \left(b - \frac{k}{2}\right)^2 < \frac{k^2}{4}$$

よって、点 (a, b) の表す領域は、下の図の斜線部分で境界線を含まない。



(2) 上の図の 3 点 P, Q, R の座標は

$$P(1, k), \quad Q\left(1, \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}\right), \quad R\left(\frac{k}{2\sqrt{2}}, \frac{k}{2} + \frac{k}{2\sqrt{2}}\right)$$

点 (a, b) が 3 点 P, Q, R と一致するときの $a + b$ の値はそれぞれ

$$1 + k, \quad 1 + \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}, \quad \frac{k}{2} + \frac{k}{\sqrt{2}}$$

$1 + k \geq \frac{k}{2} + \frac{k}{\sqrt{2}}$, すなわち, $2 < k \leq 2(\sqrt{2} + 1)$ のとき

$$0 < a + b < 1 + k, \quad a + b \neq 1 + \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}$$

$$1 + k \leq \frac{k}{2} + \frac{k}{\sqrt{2}}, \text{ すなわち, } 2(\sqrt{2} + 1) \leq k \text{ のとき}$$

$$0 < a + b < \frac{k}{2} + \frac{k}{\sqrt{2}}, \quad a + b \neq 1 + \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}$$

