

平成 14 年度 広島大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
 教育 (第一類・第二類 (技術・情報系)・第四類 (人間生活系))・
 経済 (昼)・歯 (口腔健康科学 (口腔保健))

問題 1 2 3 4 5

- 1 正の定数 a に対し, $\log_a(3x) + \log_{\sqrt{a}}(a-x) = 1$ を満たす実数 x がちょうど 2 つある. このとき, a はどのような範囲にあるか.
- 2 直線 $x+y=1$ 上の点 Q と, 放物線 $y=x^2$ 上の原点 O とは異なる点 R に対し, 2 つの半直線 OQ , OR の x 軸の正の向きからはかった角をそれぞれ α , β とおく. さらに, 線分 QR の中点を P とおく. 2 点 Q , R が $\alpha = \beta + 45^\circ$, $0^\circ < \beta < 45^\circ$ を満たすように動くとき, 次の問いに答えよ.
- (1) 直線 OQ の傾きを a , 直線 OR の傾きを b とするとき, $a = \frac{1+b}{1-b}$ となることを示せ.
 - (2) 点 P の座標を b を用いて表せ.
 - (3) 点 P の軌跡を求めよ.
- 3 放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ ($a < b$) における接線をそれぞれ l_A , l_B とする.
- (1) l_A , l_B の交点を $P(p, q)$ とするとき, a , b は 2 次方程式 $x^2 - 2px + q = 0$ の解であることを示せ.
 - (2) 2 直線 l_A , $x=b$ と放物線 $y=x^2$ とで囲まれた図形の面積 S は $\frac{1}{3}(b-a)^3$ であることを示せ.
 - (3) 交点 P が放物線 $y=-(x-1)^2$ 上を動くとき, 面積 S の最小値を求めよ.
- 4 1 個のさいころを投げるという試行をくり返す. 奇数の目が出たら A の勝ち, 偶数の目が出たら B の勝ちとし, どちらかが 4 連勝したら試行を終了する.
- (1) この試行が 4 回で終了する確率を求めよ.
 - (2) この試行が 7 回以下で終了する確率を求めよ.
 - (3) この試行が 5 回以上続き, かつ, 4 回目が A の勝ちである確率を求めよ.
 - (4) この試行がちょうど 8 回で終了する確率を求めよ.

5 三角形 ABC において,

$$|\overrightarrow{AB}| = c, \quad |\overrightarrow{BC}| = a, \quad |\overrightarrow{CA}| = b, \quad \vec{p} = \frac{\overrightarrow{AB}}{c}, \quad \vec{q} = \frac{\overrightarrow{BC}}{a}, \quad \vec{r} = \frac{\overrightarrow{CA}}{b}$$

とおき, $b < c$, $\angle B < \angle C$ とする.

(1) $|\vec{r} - \vec{q}| < |\vec{q} - \vec{p}|$ であることを示せ.

(2) 定数 s, t に対して, 辺 AB 上の点 D, 辺 AC 上の点 E があって

$$\overrightarrow{BE} = s(\vec{q} - \vec{p}), \quad \overrightarrow{CD} = t(\vec{r} - \vec{q})$$

となっている. このとき, s, t を a, b, c の式で表し, さらに $|t(\vec{r} - \vec{q})| < |s(\vec{q} - \vec{p})|$ であることを示せ.

解答例

1 (*) $\log_a(3x) + \log_{\sqrt{a}}(a-x) = 1$ について ($a > 0$), 真数は正であるから

$$a-x > 0 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < x < a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(*) \text{ より } \log_a 3x(a-x)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 3x(a-x)^2 = a$$

$$\text{整理すると } 3x^3 - 6ax^2 + 3a^2x = a$$

$$f(x) = 3x^3 - 6ax^2 + 3a^2x \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = 9x^2 - 12ax + 3a^2 = 3(3x-a)(x-a)$$

$0 < x < a$ における $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{9}a^3$	$\searrow$	0

$0 < x < a$ において $f(x) = a$ となる x の個数が 2 個であるから

$$0 < a < \frac{4}{9}a^3 \quad \text{これを解いて} \quad \frac{3}{2} < a$$

2 (1) $a = \tan \alpha$, $b = \tan \beta$ であるから

$$\begin{aligned} a &= \tan \alpha = \tan(\beta + 45^\circ) \\ &= \frac{\tan \beta + \tan 45^\circ}{1 - \tan \beta \tan 45^\circ} = \frac{b+1}{1-b} \end{aligned}$$

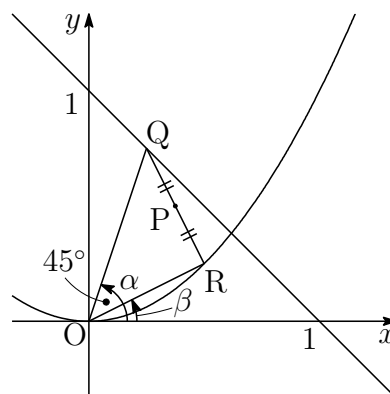
$$(2) \text{ OR : } y = bx, \text{ OQ : } y = \frac{b+1}{1-b}x$$

$$\text{R}(b, b^2), \text{ Q}\left(\frac{1-b}{2}, \frac{1+b}{2}\right)$$

$$\text{よって } \text{P}\left(\frac{1+b}{4}, \frac{1+b+2b^2}{4}\right), \quad 0 < b < 1$$

(3) $x = \frac{1+b}{4}$, $y = \frac{1+b+2b^2}{4}$, $0 < b < 1$ であるから
点 P の軌跡の方程式は

$$y = 8x^2 - 3x + \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right)$$



3 (1) $y = x^2$ より $y' = 2x$

$$l_A : y = 2ax - a^2$$

$$l_B : y = 2bx - b^2$$

点 (p, q) は l_A , l_B 上の点であるから

$$a^2 - 2pa + q = 0$$

$$b^2 - 2pb + q = 0$$

したがって, a, b は 2 次方程式

$$x^2 - 2px + q = 0 \quad \cdots (*)$$

の解である.

(2) 上の図から, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \{x^2 - (2ax - a^2)\} dx = \int_a^b (x - a)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - a)^3 \right]_a^b = \frac{1}{3}(b - a)^3 \end{aligned}$$

(3) 点 $P(p, q)$ は放物線 $y = -(x - 1)^2$ 上の点であるから

$$q = -(p - 1)^2$$

a, b は 2 次方程式 $(*)$ の解であるから, 解と係数の関係により

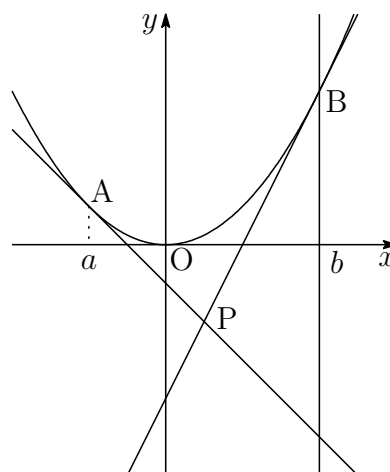
$$a + b = 2p, \quad ab = q$$

上式および (2) の結果に注意して

$$\begin{aligned} (b - a)^2 &= (a + b)^2 - 4ab = (2p)^2 - 4q \\ &= 4p^2 + 4(p - 1)^2 = 8p^2 - 8p + 4 \\ &= 8 \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \end{aligned}$$

ゆえに $b - a \geq \sqrt{2}$ したがって $S \geq \frac{1}{3}(\sqrt{2})^3$

よって, S の最小値は $\frac{2}{3}\sqrt{2}$



- 4 (1) A が4連勝するときとBが4連勝するときの確率であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 = \frac{1}{8}$$

- (2) 5回で終了するとき, ABBBB または BAAAA の順に勝つ確率であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 2 = \frac{1}{16}$$

6回で終了するとき, XBBBB または XBAAAA の順に勝つ確率であるから (X は A または B)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times 2 \times 2 = \frac{1}{16}$$

7回で終了するとき, XXBBBB または XXBAAAA の順に勝つ確率であるから (X は A または B)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 \times 2^2 \times 2 = \frac{1}{16}$$

(1) の確率とこれらの確率により

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

- (3) 試行が4回で終了または4回目がBの勝ちである確率は

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{9}{16}$$

求める確率はこの余事象の確率であるから

$$1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

- (4) 8回で終了するとき, YYYBAAAA または ZZZABBBB の順に勝つ確率である. Y, Z は A または B であるが, YYY は BBB の場合を除き, ZZZ は AAA の場合を除く. したがって, 求める確率は

$$\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 2 = \frac{7}{128}$$

■

5 (1) (*) $\vec{p} = \frac{\overrightarrow{AB}}{c}$, $\vec{q} = \frac{\overrightarrow{BC}}{a}$, $\vec{r} = \frac{\overrightarrow{CA}}{b}$ より

$$|\vec{p}| = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{c} = 1, \quad |\vec{q}| = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{a} = 1, \quad |\vec{r}| = \frac{|\overrightarrow{CA}|}{b} = 1$$

したがって

$$|\vec{r} - \vec{q}|^2 = |\vec{r}|^2 + 2(-\vec{q}) \cdot \vec{r} + |\vec{q}|^2 = 2 + 2 \cos C$$

$$|\vec{q} - \vec{p}|^2 = |\vec{q}|^2 + 2(-\vec{p}) \cdot \vec{q} + |\vec{p}|^2 = 2 + 2 \cos B$$

$\angle B < \angle C$ より, $\cos C < \cos B$ であるから

$$|\vec{r} - \vec{q}|^2 < |\vec{q} - \vec{p}|^2 \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{r} - \vec{q}| < |\vec{q} - \vec{p}|$$

(2) (*) より

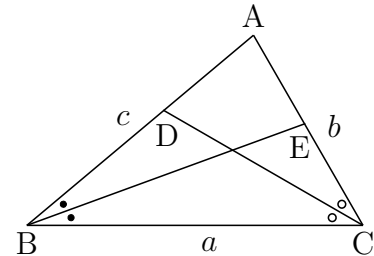
$$\overrightarrow{BE} = s(\vec{q} - \vec{p}) = s \left(\frac{\overrightarrow{BC}}{a} - \frac{\overrightarrow{AB}}{c} \right) = \frac{s}{a} \overrightarrow{BC} + \frac{s}{c} \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{CD} = t(\vec{r} - \vec{q}) = t \left(\frac{\overrightarrow{CA}}{b} - \frac{\overrightarrow{BC}}{a} \right) = \frac{t}{b} \overrightarrow{CA} + \frac{t}{a} \overrightarrow{CB}$$

2点 D, E はそれぞれ辺 AB, 辺 AC 上の点であるから

$$\frac{s}{a} + \frac{s}{c} = 1, \quad \frac{t}{b} + \frac{t}{a} = 1$$

よって $s = \frac{ca}{c+a}, \quad t = \frac{ab}{a+b}$



$$b < c \text{ より } s - t = \frac{ca}{c+a} - \frac{ab}{a+b} = \frac{a^2(c-b)}{(c+a)(a+b)} > 0$$

したがって, $0 < t < s$ および (1) の結果から

$$t|\vec{r} - \vec{q}| < s|\vec{r} - \vec{q}| < s|\vec{q} - \vec{p}| \quad \text{よって} \quad |t(\vec{r} - \vec{q})| < |s(\vec{q} - \vec{p})|$$

