

平成13年度 広島大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
 教育(第一類・第二類(技術・情報系)・第四類(人間生活系))・
 経済(昼)・歯(口腔健康科学(口腔保健))

問題 1 2 3 4 5

1 次の問いに答えよ.

(1) 次の不等式を満たす x の範囲を求めよ.

$$\log_3(x-7) + \log_3(x-5) \leq 1$$

(2) 次の不等式を満たす y の範囲を求めよ.

$$9^y - 8 \times 3^y - 9 \leq 0$$

(3) x, y がそれぞれ (1), (2) の範囲を動くとき, $\log_2 x + 2^y$ の最大値を求めよ.

2 放物線 $y = x^2$ と直線 ℓ が2点で交わっている. それらの交点の x 座標を s, t ($s < t$) とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) 放物線 $y = x^2$ と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 S は, $S = \frac{1}{6}(t-s)^3$ で与えられることを証明せよ.

(2) 直線 ℓ が, 点 (t, t^2) における $y = x^2$ の接線と直交しているとき, s を t で表せ.

(3) (2) のとき, (1) の面積 S の最小値, および最小値を与える t を求めよ.

3 $y = a(\sin \theta + \cos \theta) + \sin 2\theta$ とする. ただし, a は正の定数である.

(1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおいて, y を t の式で表せ.

(2) $t = \sin \theta + \cos \theta$ のとりうる値の範囲を求めよ.

(3) y の最大値 M と最小値 m を, それぞれ a を用いて表せ.

4 三角形 OAB において, 辺 AB, BO をそれぞれ 1:2 に内分する点を M, N とする. また, 線分 OM と AN の交点を P とする.

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおくとき, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{OP}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ.

(2) OM と AN が直交し, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ のとき, $\angle AOB$ を求めよ.

(3) (2) のとき, さらに $|\overrightarrow{OP}|$ を求めよ.

5 さいころを投げて出た目の数が k で割り切れるという事象を A_k , 2個のさいころを同時に投げて出た2つの目の数の積が k で割り切れるという事象を B_k , 3個のさいころを同時に投げて出た3つの目の数の積が k で割り切れるという事象を C_k とする.

(1) 事象 A_2, A_3, A_4 の確率 $P(A_2), P(A_3), P(A_4)$ を, それぞれ求めよ.

(2) 事象 B_2, B_3, B_4 の確率 $P(B_2), P(B_3), P(B_4)$ を, それぞれ求めよ.

(3) 事象 C_2, C_3 の確率 $P(C_2), P(C_3)$ を, それぞれ求めよ.

解答例

- 1** (1) (*) $\log_3(x-7) + \log_3(x-5) \leq 1$ について、真数は正であるから

$$x-7 > 0 \quad \text{かつ} \quad x-5 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 7 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} (*) \text{ より } \log_3(x-7)(x-5) &\leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-7)(x-5) \leq 3 \\ \text{整理すると } x^2 - 12x + 32 &\leq 0 \quad \text{すなわち} \quad (x-4)(x-8) \leq 0 \\ \text{これを解いて } 4 &\leq x \leq 8 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の共通範囲を求めて } \mathbf{7 < x \leq 8}$$

$$(2) \quad 9^y - 8 \times 3^y - 9 \leq 0 \text{ より } (3^y + 1)(3^y - 9) \leq 0$$

$$3^y + 1 > 0 \text{ に注意して } 3^y - 9 \leq 0 \quad \text{よって} \quad \mathbf{y \leq 2}$$

$$(3) \quad (1), (2) \text{ の結果から } \log_2 x \leq \log_2 8 = 3, \quad 2^y \leq 2^2 = 4$$

$$\text{よって, } x = 8, \quad y = 2 \text{ のとき, 最大値 } 3 + 4 = \mathbf{7}$$



- 2** (1) $l: y = ax + b$ とする. l と放物線 $y = x^2$ の交点が s, t であるから ($s < t$)

$$ax + b - x^2 = -(x - s)(x - t)$$

したがって

$$S = \int_s^t (ax + b - x^2) dx = - \int_s^t (x - s)(x - t) dx = \frac{1}{6}(t - s)^3$$

- (2) s, t は 2 次方程式 $x^2 - ax - b = 0$ の解と係数の関係により

$$s + t = a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$y = x^2$ より, $y' = 2x$ であるから, 放物線 $y = x^2$ の点 (t, t^2) における接線の傾きは $2t$ であり, この接線と直線 $l: y = ax + b$ は垂直であるから

$$2ta = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{2t}$$

これを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$s + t = -\frac{1}{2t} \quad \text{よって} \quad s = -t - \frac{1}{2t}$$

- (3) (2) の結果を (1) の結果に代入すると $S = \frac{1}{6} \left(2t + \frac{1}{2t} \right)^3$

$$s < t \text{ であるから } -t - \frac{1}{2t} < t \quad \text{ゆえに} \quad 2t + \frac{1}{2t} > 0$$

$t > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の大小関係から

$$2t + \frac{1}{2t} \geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{2t}} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad S \geq \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{4}{3}$$

上式において, 等号が成立するとき

$$2t = \frac{1}{2t} \quad \text{すなわち} \quad t = \frac{1}{2}$$

よって, S は, $t = \frac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\frac{4}{3}$ をとる. ■

3 (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ より $t^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + \sin 2\theta$

よって $y = at + (t^2 - 1) = \mathbf{t^2 + at - 1}$

(2) $t = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$ よって $-\sqrt{2} \leq \mathbf{t} \leq \sqrt{2}$

(3) $f(t) = t^2 + at - 1$ とおくと $f(t) = \left(t + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + 4}{4}$

$$M = \begin{cases} f(\sqrt{2}) & \left(-\frac{a}{2} \leq 0\right) \\ f(-\sqrt{2}) & \left(0 \leq -\frac{a}{2}\right) \end{cases},$$

$$m = \begin{cases} f(-\sqrt{2}) & \left(-\frac{a}{2} \leq -\sqrt{2}\right) \\ f\left(-\frac{a}{2}\right) & \left(-\sqrt{2} \leq -\frac{a}{2} \leq \sqrt{2}\right) \\ f(\sqrt{2}) & \left(\sqrt{2} \leq -\frac{a}{2}\right) \end{cases}$$

したがって

$$M = \begin{cases} 1 + \sqrt{2}a & (a \geq 0) \\ 1 - \sqrt{2}a & (a \leq 0) \end{cases},$$

$$m = \begin{cases} 1 - \sqrt{2}a & (2\sqrt{2} \leq a) \\ -\frac{a^2 + 4}{4} & (-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}) \\ 1 + \sqrt{2}a & (a \leq -2\sqrt{2}) \end{cases}$$

a は正の定数であるから

$$M = 1 + \sqrt{2}a \quad (a > 0),$$

$$m = \begin{cases} 1 - \sqrt{2}a & (2\sqrt{2} \leq a) \\ -\frac{a^2 + 4}{4} & (0 < a \leq 2\sqrt{2}) \end{cases}$$

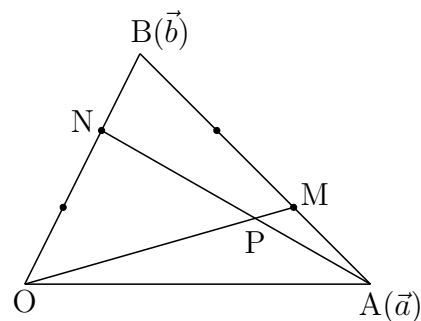
■

4 (1) $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

$$\overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\vec{b} = \frac{3}{2}\overrightarrow{ON} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{ON} \\ &= \frac{7}{6} \cdot \frac{4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{ON}}{7}\end{aligned}$$



P は AN 上の点であるから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{7}(4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{ON}) = \frac{1}{7}\left(4\vec{a} + 3 \cdot \frac{2}{3}\vec{b}\right) = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}$$

(2) $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AN} &= \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(-\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \\ &= -\frac{2}{3}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{9}|\vec{b}|^2 = -\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{9} \cdot 3 = \frac{1}{9}\vec{a} \cdot \vec{b}\end{aligned}$$

OM ⊥ AN であるから, $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$ より

$$\frac{1}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{よって} \quad \angle AOB = 90^\circ$$

(3) $|\vec{a}|^2 = 1, |\vec{b}|^2 = 3, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = \left|\frac{4}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}\right|^2 = \frac{16}{49} \cdot 1 + \frac{4}{49} \cdot 3 = \frac{4}{7}$$

$$\text{よって} \quad |\overrightarrow{OP}| = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

■

- 5** (1) $P(A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(A_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(A_4) = \frac{1}{6}$
- (2) $P(B_2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, $P(B_3) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$,
 事象 B_4 は次の 15 通りである.

	1	2	3	4	5	6
1				○		
2		○		○		○
3				○		
4	○	○	○	○	○	○
5				○		
6		○		○		○

よって $P(B_4) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

- (3) $P(C_2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$, $P(C_3) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}$ ■