

平成24年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)90分
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護・作業]))

問題 1 2 3 4

- 1 $m > 0, n > 0, 0 < x < 1$ とする. $\triangle OAB$ の辺 OA を $m:n$ に内分する点を P , 辺 OB を $n:m$ に内分する点を Q とする. また, 線分 AQ を $1:x$ に外分する点を S , 線分 BP を $1:x$ に外分する点を T とする.

- (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき, $\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}, \vec{b}, m, n, x$ で表せ.
(2) 3点 O, S, T が一直線上にあるとき, x を m, n で表せ.

- 2 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で定義された関数

$$f(\theta) = 4 \cos 2\theta \sin \theta + 3\sqrt{2} \cos 2\theta - 4 \sin \theta$$

を考える.

- (1) $x = \sin \theta$ とおく. $f(\theta)$ を x で表せ.
(2) $f(\theta)$ の最大値と最小値, およびそのときの θ の値を求めよ.
- 3 xy 平面上に3点 $A(a, b), B(a+3, b), C(a+1, b+2)$ がある. 不等式 $y \geq x^2$ の表す領域を D , 不等式 $y \leq x^2$ の表す領域を E とする.
- (1) 点 C が領域 D に含まれ, 点 A と点 B が領域 E に含まれるような a, b の条件を連立不等式で表せ.
(2) (1) で求めた条件を満たす点 (a, b) の領域 F を ab 平面上に図示せよ.
(3) (2) で求めた領域 F の面積を求めよ.
- 4 A と B の2チームが試合を行い, どちらかが先に k 勝するまで試合を繰り返す. 各試合で A が勝つ確率を p , B が勝つ確率を q とし, $p+q=1$ とする. A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく.

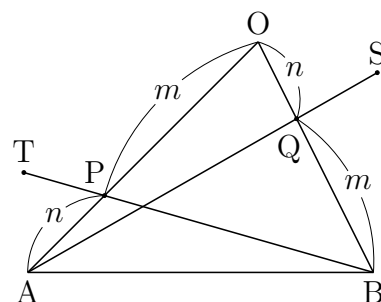
- (1) P_2 を p と q で表せ.
(2) P_3 を p と q で表せ.
(3) $\frac{1}{2} < q < 1$ のとき, $P_3 < P_2$ であることを示せ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{n}{m+n} \vec{b}$$

S は AQ を $1 : x$ に外分する点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \frac{-x\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ}}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x} \left(-x\vec{a} + \frac{n}{m+n} \vec{b} \right) \end{aligned}$$



(2) $\overrightarrow{OT}$ は, $\overrightarrow{OS}$ の m と n , $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を入れ替えたものであるから

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{1-x} \left(\frac{m}{m+n} \vec{a} - x\vec{b} \right)$$

$\overrightarrow{OS} // \overrightarrow{OT}$ であるから ($0 < x < 1$)

$$-x : \frac{n}{m+n} = \frac{m}{m+n} : (-x) \quad \text{よって} \quad x = \frac{\sqrt{mn}}{m+n}$$

■

$$\begin{aligned} \boxed{2} \quad (1) \quad f(\theta) &= 4 \cos 2\theta \sin \theta + 3\sqrt{2} \cos 2\theta - 4 \sin \theta \\ &= 4(1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta + 3\sqrt{2}(1 - 2 \sin^2 \theta) - 4 \sin \theta \\ &= -8 \sin^3 \theta - 6\sqrt{2} \sin^2 \theta + 3\sqrt{2} \\ &= -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

(2) $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より, $-1 \leq x \leq 1$. $g(x) = f(\theta)$ とおくと

$$g(x) = -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}$$

$$g'(x) = -24x^2 - 12\sqrt{2}x = -24x \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

したがって, $g(x)$ の増減表は

x	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	0	...	1
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	$8 - 3\sqrt{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	$-8 - 3\sqrt{2}$

$$g(0) - g(-1) = 3\sqrt{2} - (8 - 3\sqrt{2}) = 2(3\sqrt{2} - 4) = 2(\sqrt{18} - 4) > 0$$

よって $x = 0$ すなわち $\theta = 0$ のとき 最大値 $3\sqrt{2}$

$x = 1$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき 最小値 $-8 - 3\sqrt{2}$

■

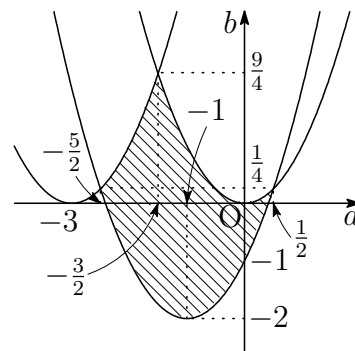
- 3 (1) 点 $C(a+1, b+2)$ は領域 $D: y \geq x^2$ に含まれるから

$$b+2 \geq (a+1)^2$$

$$\text{ゆえに } b \geq (a+1)^2 - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

2点 $A(a, b)$, $B(a+3, b)$ は $E: y \leq x^2$ に含まれるから

$$b \leq a^2 \quad \cdots \textcircled{2}, \quad b \leq (a+3)^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$



- (2) F は、 $\textcircled{1} \sim \textcircled{3}$ を同時に満たす右の図の斜線部分で、境界線を含む。

- (3) 求める領域 F の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} [(a+3)^2 - \{(a+1)^2 - 2\}] da + \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} [a^2 - \{(a+1)^2 - 2\}] da \\ &= \int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} 4 \left(a + \frac{5}{2} \right) da - \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} 2 \left(a - \frac{1}{2} \right) da \\ &= \left[2 \left(a + \frac{5}{2} \right)^2 \right]_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} - \left[\left(a - \frac{1}{2} \right)^2 \right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} = 6 \end{aligned}$$

■

- 4 (1) A が B に 2 勝する直前の勝敗は、1 勝 0 敗と 1 勝 1 敗であるから

$$P_2 = (p + {}_2C_1 pq)p = p^2(1 + 2q)$$

- (2) A が B に 3 勝する直前の勝敗は、2 勝 0 敗、2 勝 1 敗、2 勝 2 敗であるから

$$P_3 = (p^2 + {}_3C_1 p^2 q + {}_4C_2 p^2 q^2)p = p^3(1 + 3q + 6q^2)$$

- (3) (1),(2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{P_2 - P_3}{p^2} &= 1 + 2q - p(1 + 3q + 6q^2) \\ &= 1 + 2q - (1 - q)(1 + 3q + 6q^2) \\ &= 3q^2(2q - 1) \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} < q < 1$ より、 $2q - 1 > 0$ であるから

$$P_2 - P_3 > 0 \quad \text{よって} \quad P_3 < P_2$$

■