

平成23年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)90分  
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護・作業]))

問題 1 2 3 4

1 実数  $x$  に対して  $k \leq x < k+1$  を満たす整数  $k$  を  $[x]$  で表す. たとえば,  $[2] = 2$ ,  $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$ ,  $[-2.1] = -3$  である.

- (1)  $n^2 - 5n + 5 < 0$  を満たす整数  $n$  をすべて求めよ.
- (2)  $[x]^2 - 5[x] + 5 < 0$  を満たす実数  $x$  の範囲を求めよ.
- (3)  $x$  は (2) で求めた範囲にあるものとする.  $x^2 - 5[x] + 5 = 0$  を満たす  $x$  をすべて求めよ.

2  $a$  を正の実数,  $b$  と  $c$  を実数とし, 2点  $P(-1, 3)$ ,  $Q(1, 4)$  を通る放物線  $y = ax^2 + bx + c$  を  $C$  とおく.  $C$  上の2点  $P$ ,  $Q$  における  $C$  の接線をそれぞれ  $l_1$ ,  $l_2$  とする.

- (1)  $b$  の値を求め,  $c$  を  $a$  で表せ.
- (2)  $l_1$  と  $l_2$  の交点の座標を  $a$  で表せ.
- (3) 放物線  $C$  と接線  $l_1$ ,  $l_2$  で囲まれる図形の面積が1に等しくなるような  $a$  の値を求めよ.

3  $a$ ,  $b$  を実数とし,  $xy$  平面上の3直線を  $l: x + y = 0$ ,  $l_1: ax + y = 2a + 2$ ,  $l_2: bx + y = 2b + 2$  で定める.

- (1) 直線  $l_1$  は  $a$  の値によらない1点  $P$  を通る.  $P$  の座標を求めよ.
- (2) 直線  $l$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  によって三角形がつくられるための  $a$ ,  $b$  の条件を求めよ.
- (3)  $a$ ,  $b$  は (2) で求めた条件を満たすものとする. 点  $(1, 1)$  が (2) の三角形の内部にあるような  $a$ ,  $b$  の範囲を求め, それを  $ab$  平面上に図示せよ.

4  $n$  を 2 以上の自然数,  $q$  と  $r$  を自然数とする. 1 から  $nq$  までの番号がついた  $nq$  個の白玉, 1 から  $nr$  までの番号がついた  $nr$  個の赤玉を用意する. これら白玉と赤玉を, 1 番から  $n$  番まで番号づけられた  $n$  個の箱それぞれに, 小さい番号から順に白玉は  $q$  個ずつ, 赤玉は  $r$  個ずつ配分しておく. たとえば, 1 番の箱には番号 1 から  $q$  の白玉と番号 1 から  $r$  の赤玉が入っている. これら  $n(q+r)$  個の玉を  $n$  個の箱に以下のように再配分する. 1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し, 次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す. 同様の操作を順次繰り返し最後に  $n$  番の箱に 1 個の玉を移して終了する. このようにして実現され得る再配分の総数を  $s_n$  とし,  $n$  番の箱の白玉が  $q+1$  個であるような再配分の総数を  $a_n$  とする.

- (1)  $s_2$  を求めよ.
- (2)  $s_3$  と  $a_3$  を求めよ.
- (3)  $s_4$  と  $a_4$  を求めよ.

## 解答例

**1** (1)  $n^2 - 5n + 5 < 0$  より  $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} < n < \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \dots (*)$

このとき  $1 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2} < \frac{5 - \sqrt{5}}{2} < \frac{5 - \sqrt{4}}{2} = \frac{3}{2}$   
 $\frac{7}{2} = \frac{5 + \sqrt{4}}{2} < \frac{5 + \sqrt{5}}{2} < \frac{5 + \sqrt{9}}{2} = 4$

よって,  $(*)$  を満たす自然数  $n$  は **2, 3**

別解  $f(n) = n^2 - 5n + 5 = \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$  とおくと

$f(2) = f(3) = -1 < 0, f(1) = f(4) = 1 > 0$

$f(n) < 0$  を満たす自然数  $n$  は **2, 3**

(2)  $[x]^2 - 5[x] + 5 < 0$  について, (1) の結果を利用して  $[x] = 2, 3$

ゆえに  $[x] = 2$  のとき  $2 \leq x < 3, [x] = 3$  のとき  $3 \leq x < 4$

よって  **$2 \leq x < 4$**

(3) (2) の結果から,  $2 \leq x < 4$  における方程式  $x^2 - 5[x] + 5 = 0$  の解を求める.

(i)  $2 \leq x < 3$  のとき,  $[x] = 2$  であるから

$x^2 - 5 = 0$  ゆえに  $x = \pm\sqrt{5}$

$2 \leq x < 3$  より,  $x = \sqrt{5}$

(ii)  $3 \leq x < 4$  のとき,  $[x] = 3$  であるから

$x^2 - 10 = 0$  ゆえに  $x = \pm\sqrt{10}$

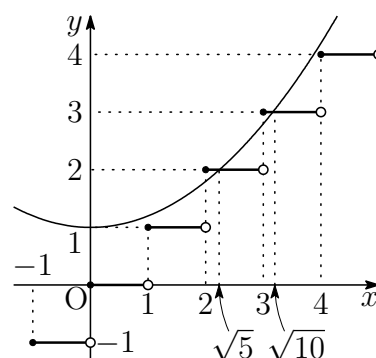
$3 \leq x < 4$  より,  $x = \sqrt{10}$

よって  **$x = \sqrt{5}, \sqrt{10}$**

補足  $x^2 - 5[x] + 5 = 0$  の解は,  $\frac{1}{5}x^2 + 1 = [x]$  より

$y = \frac{1}{5}x^2 + 1, y = [x]$

のグラフの交点の  $x$  座標である.



- 2** (1)  $C: y = ax^2 + bx + c$  上に 2 点  $P(-1, 3)$ ,  $Q(1, 4)$  があるから

$$a - b + c = 3, \quad a + b + c = 4$$

上の 2 式から  $b = \frac{1}{2}, \quad c = -a + \frac{7}{2}$

- (2) (1) の結果から  $C: y = ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} - a$  ゆえに  $y' = 2ax + \frac{1}{2}$

$C$  上の点  $P(-1, 3)$  における接線  $l_1$  の方程式は

$$y - 3 = \left(-2a + \frac{1}{2}\right)(x + 1) \quad \text{すなわち} \quad y = \left(-2a + \frac{1}{2}\right)x - 2a + \frac{7}{2}$$

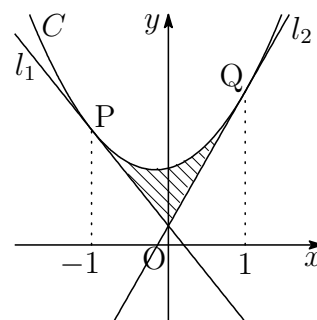
$C$  上の点  $Q(1, 4)$  における接線  $l_2$  の方程式は

$$y - 4 = \left(2a + \frac{1}{2}\right)(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = \left(2a + \frac{1}{2}\right)x - 2a + \frac{7}{2}$$

$l_1, l_2$  の方程式から、求める交点の座標は  $\left(0, -2a + \frac{7}{2}\right)$

- (3)  $C$  と  $l_1, y$  軸で囲まれた図形の面積を  $S_1$  とし、  
 $C$  と  $l_2, y$  軸で囲まれた図形の面積を  $S_2$  とする。

$$\begin{aligned} S_1 &= a \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx = a \left[ \frac{1}{3}(x+1)^3 \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{a}{3}, \\ S_2 &= a \int_0^1 (x-1)^2 dx = a \left[ \frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{3} \end{aligned}$$



$$S_1 + S_2 = 1 \text{ であるから } \frac{a}{3} + \frac{a}{3} = 1 \quad \text{よって} \quad a = \frac{3}{2}$$

補足  $C$  と直線  $PQ$  で囲まれた図形の面積を  $S_0$  とすると、 $C$  の  $x^2$  の係数  $a$  および 2 点  $P, Q$  の  $x$  座標から

$$S_0 = \frac{a}{6} (1+1)^3 = \frac{4}{3}a$$

このとき、 $C$  と  $l_1, l_2$  で囲まれた図形の面積<sup>1</sup> は  $\frac{1}{2}S_0 = \frac{2}{3}a$  ■

<sup>1</sup><http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-bun-2009.pdf> **4** を参照

**3** (1)  $l_1: ax + y = 2a + 2$  より  $y = -a(x - 2) + 2$

したがって、 $l_1$  は、点  $(2, 2)$  を通り、傾き  $-a$  の直線である。

よって、求める点 P の座標は **(2, 2)**

別解  $l_1: ax + y = 2a + 2$  より  $(x - 2)a + y - 2 = 0$

$a$  の値によらず、成立する恒等式であるから

$$x - 2 = 0, \quad y - 2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = 2, \quad y = 2$$

よって、求める点 P の座標は **(2, 2)**

(2) (1) と同様に、 $l_2: bx + y = 2b + 2$  から  $y = -b(x - 2) + 2$

したがって、 $l_2$  は、点  $(2, 2)$  を通り、傾き  $-b$  の直線である。

また、 $l: x + y = 0$  ( $y = -x$ ) より、 $l$  の傾きは  $-1$  で、点 P を通らないことに注意すると、3 直線  $l, l_1, l_2$  によって三角形が作られるとき、これらの 3 直線は、互いに平行でないから

$$-a \neq -b \quad \text{かつ} \quad -a \neq -1 \quad \text{かつ} \quad -b \neq -1$$

よって  **$a \neq b, a \neq 1, b \neq 1$**

(3)  $l: x + y = 0, l_1: ax + y = 2a + 2$  の交点の  $x$  座標を  $x_1$  とし、 $l: x + y = 0, l_2: bx + y = 2b + 2$  の交点の  $x$  座標を  $x_2$  とすると、(2) の結果に注意して

$$x_1 = \frac{2(a+1)}{a-1}, \quad x_2 = \frac{2(b+1)}{b-1}$$

$l_1, l_2$  が点  $(1, 1)$  を通るとき、 $x_1 = 0, x_2 = 0$  であるから、 $x_1 x_2 < 0$  を満たせばよい。

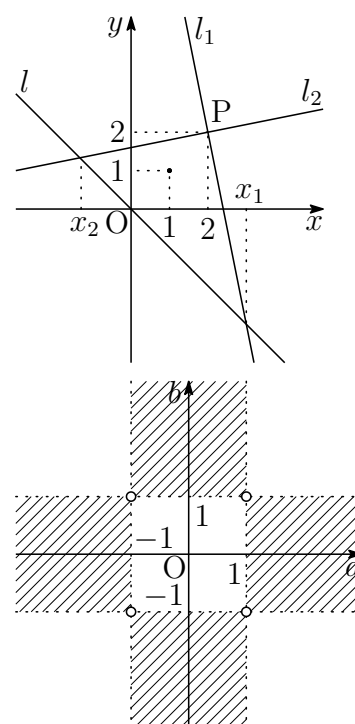
$$x_1 x_2 = \frac{4(a+1)(b+1)}{(a-1)(b-1)} < 0$$

したがって、 $a, b$  の満たす不等式は

$$(a+1)(a-1)(b+1)(b-1) < 0$$

よって、点  $(a, b)$  の満たす領域は、右の図の斜線部分で境界線は含まない。

補足  $(a+1)(a-1) \leq 0$  のとき  $(b+1)(b-1) \geq 0$  (複号同順) ■



- 4** (1) 1 番目の箱から 2 番目の箱に玉を移す場合の総数であるから

$$s_2 = q + r$$

- (2) 2 番目の箱から 3 番目の箱に玉を移す場合の総数は  $q + r + 1$  であるから,  
(1) の結果から

$$s_3 = s_2(q + r + 1) = (q + r)(q + r + 1)$$

$a_3$  は, 1 番目の箱から 2 番目の箱, さらに 2 番目の箱から 3 番目の箱に 1 個ずつ玉を移す 2 回の操作のうち, 1 回目は白玉または赤玉を移し, 2 回目は白玉が移る場合の総数である.

$$1 \text{ 回目が白玉の場合の総数は } q(q + 1)$$

$$1 \text{ 回目が赤玉の場合の総数は } rq$$

$$\text{よって } a_3 = q(q + 1) + rq = q(q + r + 1)$$

- (3) 3 番目の箱から 4 番目の箱に玉を移す場合の総数は  $q + r + 1$  であるから,  
(2) の結果から

$$s_4 = s_3(q + r + 1) = (q + r)(q + r + 1)^2$$

3 番目の箱の白玉が  $q + 1$  個となる場合の総数が  $a_3$  通りであるから, 白玉が  $q$  個となる場合の総数が  $(s_3 - a_3)$  通りある. したがって

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3(q + 1) + (s_3 - a_3)q = a_3 + qs_3 \\ &= q(q + r + 1) + q \cdot (q + r)(q + r + 1) \\ &= q(q + r + 1)^2 \end{aligned}$$

