

平成19年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)90分
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護・作業]))

問題 1 2 3 4

1 a, b を実数とする. 方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が実数解をもち, すべての解の絶対値が1以下であるとする.

- (1) この条件を満たす点 (a, b) 全体を ab 平面上に図示せよ.
- (2) $a + 2b$ の最大値と最小値を求めよ.

2 方程式 $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ で定義される円 C を考える.

- (1) 点 $A(-\sqrt{2}, 0)$ と $O(0, 0)$ を通り中心の座標が $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ および $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$ である2つの円は, どちらも円 C に接することを示せ.
- (2) 点 P が円 C 上を動くとき, $\cos \angle APO$ の最大値と最小値を求めよ.

3 数1, 2, 3を重複を許して n 個並べてできる数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ を考える.

- (1) 条件 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする. ただし, $j = 1, 2, 3$ とする.
 - (i) $A_n(1), A_n(2)$ を求めよ.
 - (ii) $n \geq 2$ のとき, $A_n(3)$ を $A_{n-1}(1), A_{n-1}(2), A_{n-1}(3)$ で表し, $A_n(3)$ を求めよ.
- (2) $n \geq 2$ のとき, 条件

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \text{ かつ } a_{n-1} > a_n$$

を満たす数列は何通りあるか.

4 $a > 0, b \geq 0, 0 < p < 1$ とし, 関数 $y = ax - bx^2$ のグラフは定点 $P(p, p^2)$ を通るとする. このグラフの $0 \leq x \leq p$ に対応する部分を C で表す.

- (1) b を a と p を用いて表せ.
- (2) a が範囲 $p \leq a \leq 1$ を動くとき, C 上の点 (x, y) の動く領域を D とする.
 - (i) x を固定して y の動く範囲を求めよ.
 - (ii) D を図示せよ.
- (3) D の面積 S を p で表し, $\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{3}{4}$ の範囲で S の最大値と最小値を求めよ.

解答例

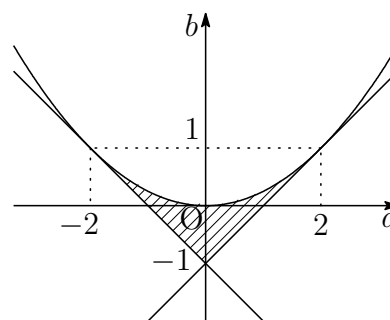
- 1 (1) $f(x) = x^2 + ax + b$ とおくと $f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$
条件を満たすとき

$$b - \frac{a^2}{4} \leq 0, \quad -1 \leq -\frac{a}{2} \leq 1,$$

$$f(1) = a + b + 1 \geq 0, \quad f(-1) = -a + b + 1 \geq 0$$

したがって、点 (a, b) の表す領域は

$$\begin{cases} b \leq \frac{a^2}{4} \\ -2 \leq a \leq 2 \\ b \geq -a - 1 \\ b \geq a - 1 \end{cases}$$



不等式の表す領域は、右の図の斜線部分で境界線を含む。

- (2) $a + 2b = k$ とおくと $b = -\frac{1}{2}a + \frac{k}{2} \cdots (*)$

(*) は、傾き $-\frac{1}{2}$ で、切片 $\frac{k}{2}$ の直線である。

k は点 $(2, 1)$ を通るとき最大値 **4**、点 $(0, -1)$ を通るとき最小値 **-2** をとる。



2 (1) $C: x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ の中心を M , 半径を r とすると $M(0, 2)$, $r = \sqrt{2}$

2 点 $A(-\sqrt{2}, 0)$, $O(0, 0)$ を通り, 中心が $B_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $B_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$ である円 C_1 , C_2 の半径をそれぞれ r_1 , r_2 とすると

$$r_1 = OB_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad r_2 = OB_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + 4} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$B_1M = \sqrt{\frac{1}{2} + 4} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad B_2M = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{したがって } B_1M = \frac{3}{\sqrt{2}} = r_1 + r, \quad B_2M = \frac{1}{\sqrt{2}} = r_2 - r$$

よって, C_1 と C は外接する. C_2 と C は内接する.

(2) 点 P は円 C_1 の外部 (境界を含む) にあるから

$$\angle APO \leq \angle AP_1O = \frac{\pi}{2}$$

同時に, 点 P は円 C_2 の内部 (境界を含む) にあるから

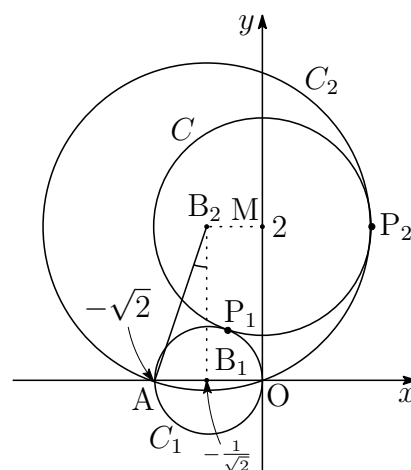
$$\angle APO \geq \angle AP_2O$$

$$\text{ゆえに } \angle AP_2O \leq \angle APO \leq \angle AP_1O$$

$$\cos \angle AP_2O \geq \cos \angle APO \geq \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\angle AP_2O = \angle AB_2B_1, \quad \cos \angle AB_2B_1 = \frac{B_1B_2}{AB_2} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2} + 4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ より}$$

$$0 \leq \cos \angle APO \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{よって} \quad \text{最大値 } \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 最小値 } 0$$



3 (1) (i) $A_n(1)$ であるのは,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1 \quad \text{よって} \quad A_n(1) = 1$$

$A_n(2)$ であるのは,

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq 2, \quad a_n = 2$$

1, 2 の 2 個から $n-1$ 個取り出す重複組合せの総数であるから

$$A_n(2) = {}_2H_{n-1} = {}_{2+(n-1)-1}C_{n-1} = {}_nC_{n-1} = {}_nC_1 = \mathbf{n}$$

(ii) $A_n(3)$ は, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq j, \quad a_n = 3 \quad (j = 1, 2, 3)$ より

$$\mathbf{A_n(3) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3)}$$

$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq 3$ の場合の数は, 1, 2, 3 の 3 個から $n-1$ 個取り出す重複組合せの総数であるから

$$\begin{aligned} A_n(3) &= {}_3H_{n-1} = {}_{3+(n-1)-1}C_{n-1} \\ &= {}_{n+1}C_{n-1} = {}_{n+1}C_2 = \frac{1}{2}\mathbf{n(n+1)} \end{aligned}$$

(2) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となるのは

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} = j \quad \text{かつ} \quad a_n < j \quad (j = 2, 3)$$

よって, 求める場合の数は

$$\begin{aligned} A_{n-1}(2) \cdot 1 + A_{n-1}(3) \cdot 2 &= (n-1) \cdot 1 + \frac{1}{2}n(n-1) \cdot 2 \\ &= \mathbf{(n+1)(n-1)} \end{aligned}$$

■

4 (1) 関数 $y = ax - bx^2$ は点 (p, p^2) を通るから $p^2 = ap - bp^2$

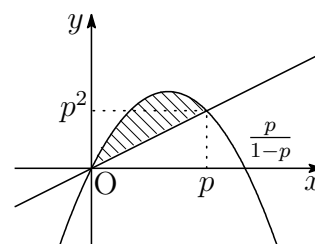
$$p \neq 0 \text{ であるから } b = \frac{a}{p} - 1$$

(2) (i) (1) の結果から

$$y = ax - \left(\frac{a}{p} - 1\right)x^2 = \frac{x(p-x)}{p}a + x^2$$

$0 \leq x \leq p$ より $(0 < p < 1)$, $\frac{x(p-x)}{p} \geq 0$
 であるから, $p \leq a \leq 1$ において, y は単調
 増加. よって

$$px \leq y \leq \frac{p-1}{p}x^2 + x$$



(ii) よって, D の表す領域は, 右の図の斜線部分で境界線を含む.

(3) (2) の結果から, D の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^p \left\{ \left(\frac{p-1}{p}x^2 + x \right) - px \right\} dx \\ &= \frac{p-1}{p} \int_0^p x(x-p) dx = \frac{1}{6}p^2(1-p) \end{aligned}$$

$$g(p) = \frac{1}{6}p^2(1-p) \text{ とおくと } g'(p) = \frac{1}{6}p(2-3p)$$

p	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$
$g'(p)$		+	0	-	
$g(p)$	$\frac{1}{48}$	$\nearrow$	$\frac{2}{81}$	$\searrow$	$\frac{3}{128}$

よって, $p = \frac{2}{3}$ で最大値 $\frac{2}{81}$, $p = \frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{1}{48}$ をとる. ■