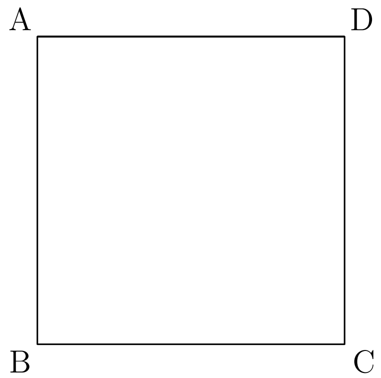
平成 26 年度　千葉大学　２次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (中学数学を除く) 1 2 3 4 (90 分) 数 I・A
- 文 (行動科学)・教育 (情報教育分野)・法政経済・園芸学部・先進科学プログラム (物理化学・生命科学・人間科学) 1 4 6 7 (90 分) 数 I・II・A・B
- 教育 (中学数学) 1 2 3 4 6 7 (150 分) 数 I・II・A・B
- 先進科学プログラム (物理・電気電子・ナノサイエンス・画像科学・情報画像) 5 6 8 9 10 (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 理 (物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・ 5 6 8 9 10 (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 医学部 5 6 10 11 13 (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (数学・情報数理) 5 6 8 10 12 13 (180 分) 数 I・II・III・A・B・C

1 下図のような 1 辺の長さ 10cm の正方形 ABCD がある．点 P および点 Q は時刻 0 に A および B をそれぞれ出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒 1cm 進む．また，点 R は時刻 0 に B を出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒 2cm 進む．点 R が A に達するまでに △PQR の面積が 35cm^2 となる時刻をすべて求めよ．



2 △ABC において，∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C とするとき，次の等式が成り立つとする．

$$\frac{\sin A}{5} = \frac{\sin B}{3}$$

また，A，B，C のうち最も大きな角は 120° であるとする．このとき，$\cos A$，$\cos B$，$\cos C$ の値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ p は奇数である素数とし，$N=(p+1)(p+3)(p+5)$ とおく．

(1) N は 48 の倍数であることを示せ．

(2) N が 144 の倍数になるような p の値を，小さい順に 5 つ求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ A，B ふたりは，それぞれ 1 から 4 までの番号のついた 4 枚のカードを持ち，それを用いて何回かの勝負から成るつぎのゲームをする．

- 初めに A，B はそれぞれ 4 枚のカードを自分の袋に入れ，よくかきまぜる．
- A，B はそれぞれ自分の袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出し，そのカードを比較して 1 回の勝負を行う．すなわち，大きい番号のついたカードを取り出したほうがこの回は勝ちとし，番号が等しいときはこの回は引き分けとする．
- 袋から取り出したカードは袋に戻さないものとする．
- A，B どちらかが 2 回勝てば，カードの取り出しをやめて，2 回勝ったほうをゲームの勝者とする．4 枚すべてのカードを取り出してもいずれも 2 回勝たなければゲームは引き分けとする．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) A が 0 勝 0 敗 4 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ．

(2) A が 1 勝 1 敗 2 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ．

(3) A がゲームの勝者になる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 袋の中に，赤玉が 3 個，白玉が 7 個入っている．袋から玉を無作為に 1 つ取り出し，色を確認してから，再び袋に戻すという試行を行う．この試行を N 回繰り返したときに，赤玉を A 回 (ただし $0 \leqq A \leqq N$) 取り出す確率を $p(N,\ A)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 確率 $p(N,\ A)$ を N と A を用いて表せ．

(2) N が 10 の倍数，すなわち $N=10n$ となる自然数 n があるとする．確率 $p(10n,\ 0),\ p(10n,\ 1), \ldots,\ p(10n,\ 10n)$ のうち，一番大きな値は $p(10n,\ 3n)$ であることを次の手順により証明せよ．

(i) 0 以上の整数 a，自然数 b に対して，$\dfrac{b!}{a!} \leqq b^{b-a}$ を示す．ただし $0!=1$ とする．

(ii) 0 以上 $10n$ 以下の整数 m に対して，$\dfrac{p(10n,\ m)}{p(10n,\ 3n)} \leqq 1$ を示す．

$\boxed{6}$ 座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある．円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ (ただし $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ．また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ．

$\boxed{7}$ 実数 a に対し，関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|t+1|\,dt+a$ を考える．曲線 $C : y=f(x)$ が x 軸と 2 個の共有点を持つための a の範囲を求めよ．またこのとき曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{8}$ 座標平面上に，円 $C : (x-1)^2+(y-1)^2=1$ と点 $\mathrm{Q}(1,\ 2)$ がある．点 P_1 の座標を $(3,\ 0)$ とし，x 軸上の点 $\mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ldots$ を以下の条件によって決め，P_n の座標を $(p_n,\ 0)$ とする．

点 P_n から円 C に接線を引き，その y 座標が正である接点を T_n とする．
このとき，3 点 $\mathrm{Q},\ \mathrm{T}_n,\ \mathrm{P}_{n+1}$ は同一直線上にある．$(n=1,2,\ldots)$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 T_1 の座標を求めよ．

(2) 点 P_2 の座標を求めよ．

(3) 点 T_n の座標を p_n の式で表せ．

(4) 点 P_n の座標を n の式で表せ．

$\boxed{9}$ n，m を 0 以上の整数とし，

$$I_{n,m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta$$

とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $n\geqq 2$ のとき，$I_{n,m}$ を $I_{n-2,m+2}$ を使って表せ．

(2) 次の式

$$I_{2n+1,2m+1}=\frac{1}{2}\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$$

を示せ．

(3) 次の式

$$\frac{n!m!}{(n+m+1)!}=\frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+(-1)^m\frac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$$

を示せ．ただし $0!=1$ とする．

10 関数 $f(x) = e^{\sin x}(\sin 2x - 2\cos x)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ の値を求めよ．

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ．

(3) $x \geqq 0$ のとき $(x^2 + 2x - 2)e^x \geqq f(x)$ が成り立つことを示せ．

11 関数 $f(x) = x^x\ (x > 0)$ と正の実数 a について，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ における $f(x)f(1-x)$ の最大値および最小値を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ における $\dfrac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ の最小値を求めよ．

12 以下の問いに答えよ．

(1) $t > 0$ のとき

$$e^t > 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 座標平面上の点 $(0,\ a)$ を通って曲線 $y = xe^x$ に何本の接線が引けるか求めよ．

13 自然数 n に対して，和

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える．

(1) 各自然数 n に対して $2^k \leqq n$ をみたす最大の整数 k を $f(n)$ で表すとき，2 つの奇数 a_n，b_n が存在して

$$S_n = \frac{a_n}{2^{f(n)}b_n}$$

と表されることを示せ．

(2) $n \geqq 2$ のとき S_n は整数にならないことを示せ．

(3) さらに，自然数 m，n $(m < n)$ に対して，和

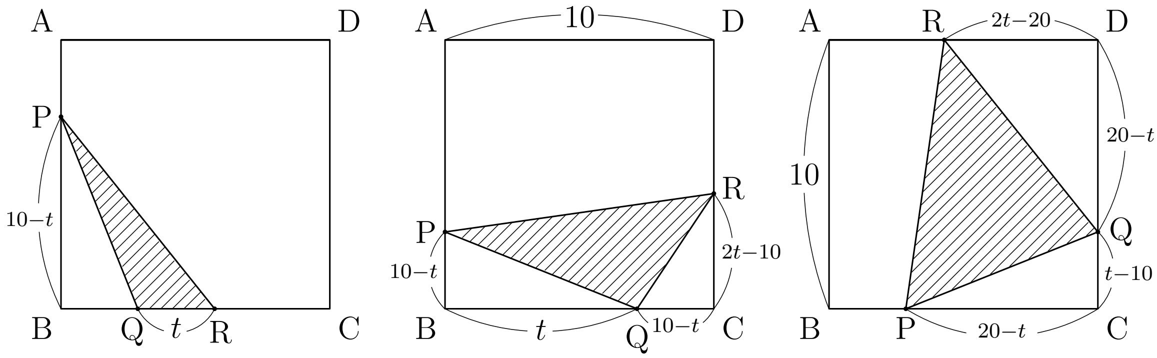
$$S_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える．$S_{m,n}$ はどんな m，n $(m < n)$ に対しても整数にならないことを示せ．

解答例

1 時刻を t とすると，点 R が A に達するのは，$t=15$ のときである．△PQR の面積を S とし，次の (i)〜(iii) の場合に分けて考える．

(i) $0 \leqq t \leqq 5$　　(ii) $5 \leqq t \leqq 10$　　(iii) $10 \leqq t \leqq 15$



(i) $0 \leqq t \leqq 5$ のとき

$$S=\frac{1}{2}t(10-t)=-\frac{1}{2}(t-5)^2+\frac{25}{2}<35$$

このとき，$S=35$ となることはない．

(ii) $5 \leqq t \leqq 10$ のとき

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\{(10-t)+(2t-10)\}\cdot10-\frac{1}{2}t(10-t)-\frac{1}{2}(10-t)(2t-10)\\&=\frac{3}{2}t^2-15t+50\end{aligned}$$

$S=35$ より　$\dfrac{3}{2}t^2-15t+50=35$　ゆえに　$t^2-10t+10=0$

$5 \leqq t \leqq 10$ に注意してこれを解くと　$t=5+\sqrt{15}$

(iii) $10 \leqq t \leqq 15$ のとき

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\{(2t-20)+(20-t)\}\cdot10-\frac{1}{2}(20-t)(t-10)-\frac{1}{2}(20-t)(2t-20)\\&=\frac{3}{2}t^2-40t+300\end{aligned}$$

$S=35$ より　$\dfrac{3}{2}t^2-40t+300=35$　ゆえに　$3t^2-80t+530=0$

$10 \leqq t \leqq 15$ に注意してこれを解くと　$t=\dfrac{40\pm\sqrt{10}}{3}$

(i)〜(iii) から，求める時刻は　$\mathbf{5+\sqrt{15}},\ \boldsymbol{\dfrac{40\pm\sqrt{10}}{3}}$　■

$\boxed{2}$ $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とおくと，正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

これと等式 $\dfrac{\sin A}{5}=\dfrac{\sin B}{3}$ により　$a:b=5:3$

$\cos A$，$\cos B$，$\cos C$ を求めるとき，$a=5$，$b=3$ として計算してもよい．

$a>b$ より，$B\neq 120^\circ$ であるから，次の (i)，(ii) の場合に分けて求める．

(i) $C=120^\circ$ のとき，余弦定理により

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cos120^\circ=49$$

$c>0$ より，$c=7$ であるから

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+7^2-5^2}{2\cdot3\cdot7}=\frac{11}{14}$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{7^2+5^2-3^2}{2\cdot7\cdot5}=\frac{13}{14}$$
$$\cos C=\cos120^\circ=-\frac{1}{2}$$

(ii) $A=120^\circ$ のとき，余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ により

$$5^2=3^2+c^2-2\cdot3c\left(-\frac{1}{2}\right)\quad \text{ゆえに}\quad c^2+3c-16=0 \qquad (*)$$

$c>0$ より，$c=\dfrac{-3+\sqrt{73}}{2}$　$(*)$ より，$c^2=-3c+16$，$\dfrac{16}{c}=c+3$

$$\cos A=\cos120^\circ=-\frac{1}{2}$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{c^2+5^2-3^2}{2c\cdot5}=\frac{c}{10}+\frac{16}{10c}=\frac{c}{10}+\frac{c+3}{10}$$
$$=\frac{c}{5}+\frac{3}{10}=\frac{-3+\sqrt{73}}{10}+\frac{3}{10}=\frac{\sqrt{73}}{10}$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{5^2+3^2-(-3c+16)}{2\cdot5\cdot3}=\frac{c}{10}+\frac{3}{5}$$
$$=\frac{-3+\sqrt{73}}{20}+\frac{3}{5}=\frac{9+\sqrt{73}}{20}$$

(i)，(ii) より

$$(\cos A,\ \cos B,\ \cos C)=\boldsymbol{\left(\frac{11}{14},\ \frac{13}{14},-\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{73}}{10},\ \frac{9+\sqrt{73}}{20}\right)}$$

■

3 (1) p は，奇素数であるから，$p+1=2n$ とおくと (n は整数)

$$\begin{aligned} N &= (p+1)(p+3)(p+5) = 2n(2n+2)(2n+4) \\ &= 8n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

連続する 3 整数 $n,\ n+1,\ n+2$ の中には，2 の倍数および 3 の倍数が少なくとも 1 つあるから，$n(n+1)(n+2)$ は 6 の倍数である．

よって，N は，8×6，すなわち，48 の倍数である．

(2) 法 3 について　$p+3\equiv p,\quad p+5\equiv p+2 \pmod 3$

したがって，$p+1$，$p+3$，$p+5$ の中で 3 の倍数は 1 つだけである．

N が $144=3\times 48$ の倍数であるとき，$p+5,\ p+3,\ p+1$ のいずれかが 9 の倍数でなければならない．自然数 k を用いて，これらを $9k$ とすると

$$p=9k-5,\ 9k-3,\ 9k-1$$

が素数となるものを小さい順に 5 つ求めればよい．このとき，k が奇数のとき，p は偶数となるから，k が偶数の場合について調べればよい．

k	2	4	6	8
$9k-5$	13	31	49	67
$9k-3$	15	33	51	69
$9k-1$	17	35	53	71

よって，求める p の値を小さい順に 5 つ求めると

13，17，31，53，67

■

4 (1) A，B の取り出し方は，ともに 4! 通りある．A が 0 勝 0 敗 4 引き分けとなるのは，A，B の取り出し方が一致する場合で，4! 通りある．よって，求める確率は

$$\frac{4!}{4!4!}=\frac{1}{4!}=\boldsymbol{\frac{1}{24}}$$

(2) A が 1 勝 1 敗 2 引き分けとなるのは，A の取り出し方に対して，B の取り出し方が，A と 2 回一致する場合で，$4!{}_4\mathrm{C}_2$ 通りある．よって，求める確率は

$$\frac{4!{}_4\mathrm{C}_2}{4!4!}=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{4!}=\frac{6}{24}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3) ゲームが引き分けとなるのは，(1) と (2) の場合に限る．また，A が勝者になる確率と B が勝者になる確率は等しく，この確率を p とすると

$$2p+\frac{1}{24}+\frac{1}{4}=1 \quad \text{これを解いて} \quad p=\frac{17}{48}$$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{17}{48}}$ ■

5 (1) 袋から無作為に 1 個取り出したとき，赤玉である確率が $\dfrac{3}{10}$ であるから，この試行を N 回繰り返したとき，赤玉を A 回取り出す確率は

$$p(N,\ A)={}_N\mathrm{C}_A\left(\frac{3}{10}\right)^A\left(1-\frac{3}{10}\right)^{N-A}=\boldsymbol{{}_N\mathrm{C}_A\left(\frac{3}{10}\right)^A\left(\frac{7}{10}\right)^{N-A}}$$

(2) (i) 0 以上の整数 a，自然数 b に対して

$$a<b\text{ のとき}\quad \frac{b!}{a!}=(a+1)(a+2)\cdots b<\overbrace{b\cdot b\cdots b}^{b-a\text{ 個}}=b^{b-a}$$

$$a=b\text{ のとき}\quad \frac{b!}{a!}=1,\quad b^{b-a}=1 \quad \text{ゆえに}\quad \frac{b!}{a!}=b^{b-a}$$

$$a>b\text{ のとき}\quad \frac{b!}{a!}=\frac{1}{(b+1)(b+2)\cdots a}<\frac{1}{\underbrace{b\cdot b\cdots b}_{a-b\text{ 個}}}=b^{b-a}$$

よって　$\dfrac{b!}{a!}\leqq b^{b-a}$

(ii) (1) の結果を利用すると

$$p(10n,\ m)={}_{10n}\mathrm{C}_m\left(\frac{3}{10}\right)^m\left(\frac{7}{10}\right)^{10n-m}$$

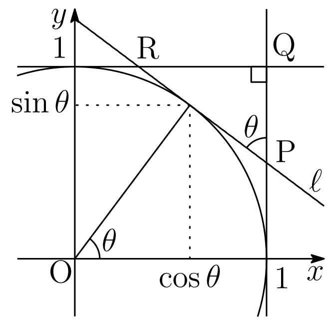
$$p(10n,\ 3n)={}_{10n}\mathrm{C}_{3n}\left(\frac{3}{10}\right)^{3n}\left(\frac{7}{10}\right)^{7n}$$

上の 2 式および (i) の結果を適用すると

$$\begin{aligned}\frac{p(10n,\ m)}{p(10n,\ 3n)}&=\frac{{}_{10n}\mathrm{C}_m}{{}_{10n}\mathrm{C}_{3n}}\left(\frac{3}{10}\right)^{m-3n}\left(\frac{7}{10}\right)^{3n-m}\\&=\frac{(3n)!}{m!}\cdot\frac{7n!}{(10n-m)!}\left(\frac{7}{3}\right)^{3n-m}\\&\leqq(3n)^{3n-m}(7n)^{m-3n}\left(\frac{7}{3}\right)^{3n-m}\\&=\frac{(3n)^{3n-m}}{(7n)^{3n-m}}\left(\frac{7}{3}\right)^{3n-m}=\left(\frac{3n}{7n}\right)^{3n-m}\left(\frac{7}{3}\right)^{3n-m}=1\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{p(10n,\ m)}{p(10n,\ 3n)}\leqq 1$　よって　$p(10n,\ m)\leqq p(10n,\ 3n)$ ■

$\boxed{6}$ 原点を中心とする半径 1 の円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線を ℓ とすると



$$\ell : x\cos\theta + y\sin\theta = 1$$

ℓ と直線 $x=1$ との交点を P とすると

$$\mathrm{P}\left(1,\ \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

Q(1, 1) とすると　　$\mathrm{PQ} = 1 - \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}$

右の図の直角三角形 PQR について

$$\mathrm{QR} = \mathrm{PQ}\tan\theta, \quad \mathrm{RP} = \frac{\mathrm{PQ}}{\cos\theta}$$

したがって，直角三角形 PQR の周の長さは

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}+\mathrm{QR}+\mathrm{RP} &= \mathrm{PQ}\left(1+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)\\ &= \frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta+\cos\theta+1}{\cos\theta}\\ &= \frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta} = 2\end{aligned}$$

直角三角形 PQR の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR} = \frac{1}{2}\mathrm{PQ}^2\tan\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\right)^2\tan\theta\\ &= \frac{(\sin\theta+\cos-1)^2}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1} = \frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta+\cos\theta+1}\\ &= 1-\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta+1} = 1-\frac{2}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+1}\end{aligned}$$

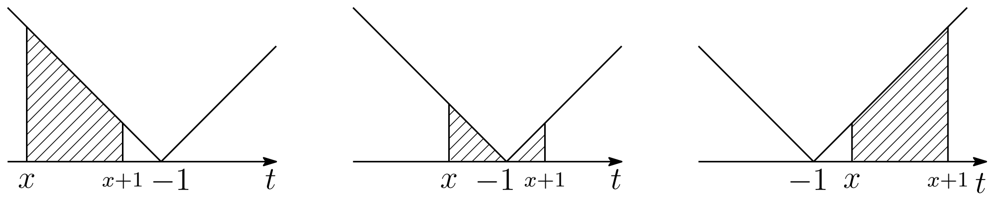
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$ であるから，S が最大となるとき

$$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

■

$\boxed{7}$ $g(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|t+1|\,dt$ とおくと，$g(x)$ は下の図の斜線部分の面積である．

(i) $x+1 \leqq -1$　　(ii) $x \leqq -1 \leqq x+1$　　(iii) $-1 \leqq x$



(i) $x+1 \leqq -1$，すなわち，$x \leqq -2$ のとき

$$\int_x^{x+1}|t+1|\,dt=\frac{1}{2}(|x+1|+|x+2|)=-x-\frac{3}{2}$$

(ii) $x \leqq -1 \leqq x+1$，すなわち，$-2 \leqq x \leqq -1$ のとき

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1}|t+1|\,dt&=\frac{1}{2}(|x+1|^2+|x+2|^2)\\&=x^2+3x+\frac{5}{2}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

(iii) $-1 \leqq x$ のとき

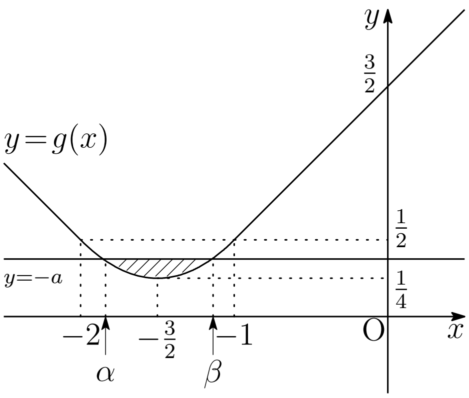
$$\int_x^{x+1}|t+1|\,dt=\frac{1}{2}(|x+1|+|x+2|)=x+\frac{3}{2}$$

(i)〜(iii) より　$g(x)=\begin{cases}-x-\dfrac{3}{2} & (x \leqq -2)\\ \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4} & (-2 \leqq x \leqq -1)\\ x+\dfrac{3}{2} & (-1 \leqq x)\end{cases}$

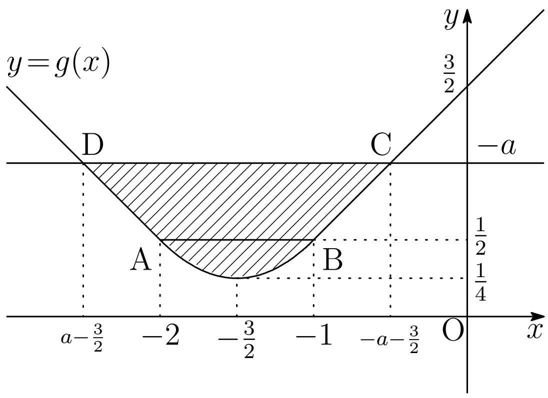
曲線 $C : y = f(x)$ が x 軸と 2 個の共有点をもつとき，$y = g(x)$ は直線 $y = -a$ と 2 個の共有点をもつから

$$-a > \frac{1}{4} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a < -\frac{1}{4}}$$

i) $\frac{1}{4} < -a \leqq \frac{1}{2}$



ii) $\frac{1}{2} \leqq -a$



(i) $\dfrac{1}{4} < -a \leqq \dfrac{1}{2}$，すなわち，$-\dfrac{1}{2} \leqq a < -\dfrac{1}{4}$ のとき

$y = g(x)$ と $y = -a$ の x 軸との共有点の x 座標は

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = -a \quad \text{ゆえに} \quad x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{-a - \frac{1}{4}}$$

$\alpha = -\dfrac{3}{2} - \sqrt{-a - \dfrac{1}{4}}$，$\beta = -\dfrac{3}{2} + \sqrt{-a - \dfrac{1}{4}}$ とし，面積を $S(a)$ とすると

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_\alpha^\beta \{-a - g(x)\}\,dx = -\int_\alpha^\beta \{g(x) + a\}\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\,dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}\left\{2\sqrt{-a - \frac{1}{4}}\right\}^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}\left(-a - \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq -a$，すなわち，$a \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき，面積は

$$\begin{aligned} S\left(-\frac{1}{2}\right) + \text{台形 ABCD} &= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\{1 + (-2a)\}\left(-a - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{6} + a^2 - \frac{1}{4} = \boldsymbol{a^2 - \frac{1}{12}} \end{aligned}$$

■

8 (1) A$(1,\ 1)$，B$(1,\ 0)$，$\mathrm{T}_n(x_n,\ y_n)$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{AP_1}}=(2,-1)$ に垂直なベクトルを $\vec{v}=(1,\ 2)$ とおく．B と T_1 は直線 AP_1 に関して対称であるから，実数 $\alpha,\ \beta$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP_1}}-\beta\vec{v},\quad \overrightarrow{\mathrm{AT_1}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP_1}}+\beta\vec{v} \qquad (*)$$

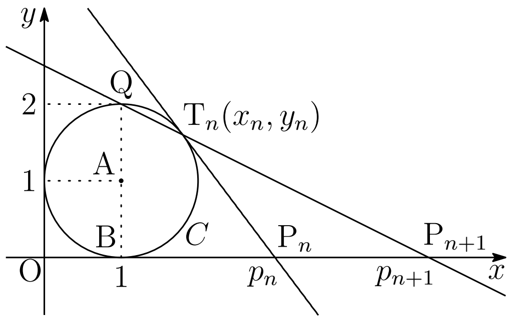
$(*)$ の第 1 式から

$$(0,-1)=\alpha(2,-1)-\beta(1,\ 2) \quad ゆえに \quad \begin{cases} 2\alpha-\beta=0 \\ -\alpha-2\beta=-1 \end{cases}$$

したがって　$\alpha=\dfrac{1}{5},\ \beta=\dfrac{2}{5}$　これを $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$(x_1-1,\ y_1-1)=\frac{1}{5}(2,-1)+\frac{2}{5}(1,\ 2)=\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$$

よって　$\mathbf{T_1}\left(\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}\right)$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{QT_1}}=\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)-(1,\ 2)=\dfrac{2}{5}(2,-1)$

直線 QT_1 は点 Q$(1,\ 2)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線であるから

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1) \quad すなわち \quad y=-\frac{1}{2}(x-5)$$

したがって，この直線と x 軸との交点 P_2 の座標は　$\mathbf{(5,\ 0)}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}_n}=(p_n-1,-1)$ に垂直なベクトルを $\vec{v_n}=(1,\ p_n-1)$ とおく．B と T_n は直線 AP_n に関して対称であるから，実数 $\alpha_n,\ \beta_n$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\alpha_n\overrightarrow{\mathrm{AP}_n}-\beta_n\vec{v_n},\quad \overrightarrow{\mathrm{AT}_n}=\alpha_n\overrightarrow{\mathrm{AP}_n}+\beta_n\vec{v_n} \qquad (**)$$

$(**)$ の第 1 式から

$$(0,-1)=\alpha_n(p_n-1,-1)-\beta_n(1,\ p_n-1)$$

ゆえに $\begin{cases}(p_n-1)\alpha_n-\beta_n=0\\ -\alpha_n-(p_n-1)\beta_n=-1\end{cases}$

したがって $\alpha_n=\dfrac{1}{(p_n-1)^2+1},\ \beta_n=\dfrac{p_n-1}{(p_n-1)^2+1}$

これを $(**)$ の第 2 式に代入すると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_n-1\\ y_n-1\end{pmatrix}&=\frac{1}{(p_n-1)^2+1}\begin{pmatrix}p_n-1\\ -1\end{pmatrix}+\frac{p_n-1}{(p_n-1)^2+1}\begin{pmatrix}1\\ p_n-1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{(p_n-1)^2+1}\begin{pmatrix}2(p_n-1)\\ (p_n-1)^2-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ゆえに $x_n=\dfrac{{p_n}^2}{(p_n-1)^2+1},\ y_n=\dfrac{2(p_n-1)^2}{(p_n-1)^2+1}$

よって $\boldsymbol{\mathrm{T}_n\left(\dfrac{{p_n}^2}{(p_n-1)^2+1},\ \dfrac{2(p_n-1)^2}{(p_n-1)^2+1}\right)}$

(4) $$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QT}_n}&=\left(\frac{{p_n}^2}{(p_n-1)^2+1},\ \frac{2(p_n-1)^2}{(p_n-1)^2+1}\right)-(1,\ 2)\\ &=\frac{2}{(p_n-1)^2+1}\begin{pmatrix}p_n-1\\ -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

直線 QT_n は点 Q(1, 2) を通り，ベクトル $\vec{v_n}=(1,\ p_n-1)$ に垂直であるから，その方程式は

$$x-1+(p_n-1)(y-2)=0$$

点 $\mathrm{P}_{n+1}(p_{n+1},\ 0)$ はこの直線上の点であるから

$$p_{n+1}-1-2(p_n-1)=0 \quad ゆえに \quad p_{n+1}-1=2(p_n-1)$$

$p_1=3$ であるから，上の第 2 式から $p_n-1=(3-1)\cdot2^{n-1}=2^n$

したがって $p_n=2^n+1$ よって $\boldsymbol{\mathrm{P}_n(2^n+1,\ 0)}$

補足 T_n の座標を求めずに，P_n の座標を求めることができる．

2 点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_n(p_n,\ 0)$ を通る直線は

$$x-1+(p_n-1)(y-1)=0$$

2 点 $\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{T}_n(x_n,\ y_n)$ の中点 $\left(\dfrac{x_n+1}{2},\ \dfrac{y_n}{2}\right)$ はこの直線上にあるから

$$\frac{x_n+1}{2}-1+(p_n-1)\left(\frac{y_n}{2}-1\right)=0$$

すなわち　$x_n-1+(p_n-1)(y_n-2)=0$

$\overrightarrow{\mathrm{QT}_n}=(x_n-1,\ y_n-2)$ は $\vec{v}_n=(1,\ p_n-1)$ と垂直であるから，直線 QT_n は，点 $\mathrm{Q}(1,\ 2)$ を通り，$\vec{v}_n=(1,\ p_n-1)$ と垂直な直線

$$x-1+(p_n-1)(y-2)=0$$

点 $\mathrm{P}_{n+1}(p_{n+1},\ 0)$ はこの直線上の点であるから

$$p_{n+1}-1=2(p_n-1) \quad ゆえに \quad p_n-1=(p_1-1)2^{n-1}=2^n$$

したがって　$p_n=2^n+1$　よって　$\mathrm{P}_n(2^n+1,\ 0)$ ■

9 (1) $I_{n,m}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta$ より

$$\begin{aligned}
I_{n,m}&=\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta\cdot(m+1)\sin^m\theta\cos\theta\,d\theta\\
&=\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta(\sin^{m+1}\theta)'\,d\theta\\
&=\frac{1}{m+1}\Big[\cos^{n-1}\theta\sin^{m+1}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{n-1}\theta)'\sin^{m+1}\theta\,d\theta\\
&=-\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\cos^{n-2}\theta(-\sin\theta)\cdot\sin^{m+1}\theta\,d\theta\\
&=\frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta\sin^{m+2}\theta\,d\theta=\boldsymbol{\frac{n-1}{m+1}I_{n-2,m+2}}
\end{aligned}$$

(2) $I_{2n+1,2m+1}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}\theta\sin^{2m+1}\theta\,d\theta$ において，$x=\cos^2\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=-2\cos\theta\sin\theta$$

θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
x	$1\longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}I_{2n+1,2m+1}&=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\sin^{2m}\theta(-2\cos\theta\sin\theta)\,d\theta\\&=-\frac{1}{2}\int_1^0 x^n(1-x)^m\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx\end{aligned}$$

(3) (1) の漸化式から

$$\begin{aligned}I_{2n+1,2m+1}&=\frac{(2n+1)-1}{(2m+1)+1}I_{(2n+1)-2,(2m+1)+2}\\&=\frac{n}{m+1}I_{2(n-1)+1,2(m+1)+1}\end{aligned}$$

上式の両辺を $n!m!$ で割ると

$$\frac{I_{2n+1,2m+1}}{n!m!}=\frac{I_{2(n-1)+1,2(m+1)+1}}{(n-1)!(m+1)!}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{I_{2n+1,2m+1}}{n!m!}=\frac{I_{1,2n+2m+1}}{(n+m)!}$$

ここで $\displaystyle I_{1,2n+2m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^{2n+2m+1}\theta\,d\theta$

$$=\frac{1}{2(n+m+1)}\Big[\ \sin^{2n+2m+2}\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2(n+m+1)}$$

したがって $\displaystyle\frac{I_{2n+1,2m+1}}{n!m!}=\frac{1}{(n+m)!}\cdot\frac{1}{2(n+m+1)}=\frac{1}{2\cdot(n+m+1)!}$

上式および (2) の等式から $\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}\qquad\cdots(*)$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx&=\int_0^1 x^n\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-x)^k\,dx\\&=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k{}_m\mathrm{C}_k\int_0^1 x^{n+k}\,dx\\&=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{{}_m\mathrm{C}_k}{n+k+1}\qquad\cdots(**)\end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ より，(3) の等式は成立する．

解説 $J_{n,m} = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ とおくと ($n,\ m$ は0以上の整数)

$$
\begin{aligned}
J_{n,m} &= \frac{1}{n+1}\int_0^1 (x^{n+1})'(1-x)^m\,dx \\
&= \frac{1}{n+1}\Big[\ x^{n+1}(1-x)^m\ \Big]_0^1 + \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{m-1}\,dx \\
&= \frac{m}{n+1}J_{n+1,m-1}
\end{aligned}
$$

上式の両辺を $n!m!$ で割ると

$$\frac{J_{n,m}}{n!m!} = \frac{J_{n+1,m-1}}{(n+1)!(m-1)!} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{J_{n,m}}{n!m!} = \frac{J_{n+m,0}}{(m+n)!}$$

ここで　$J_{n+m,0} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+m}\,dx = \frac{1}{n+m+1}$　　よって　$J_{n,m} = \dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}$

この結果を利用すると

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n(\beta-x)^m\,dx$$

について，$x = \alpha + (\beta-\alpha)t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt} = \beta - \alpha$

x	α	$\longrightarrow$	β
t	0	$\longrightarrow$	1

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n(\beta-x)^m\,dx &= (\beta-\alpha)^{n+m+1}\int_0^1 t^n(1-t)^m\,dt \\
&= (\beta-\alpha)^{n+m+1}J_{n,m}
\end{aligned}
$$

よって　$\displaystyle\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n(\beta-x)^m\,dx = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}(\beta-\alpha)^{n+m+1}}$ ■

10 (1) $f(x) = e^{\sin x}(\sin 2x - 2\cos x) = 2e^{\sin x}(\sin x - 1)\cos x$

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ において，$t = \sin x$ とおくと

$$\frac{dt}{dx} = \cos x,$$

x	$-\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$-1 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}(\sin x - 1)\cos x\,dx \\ &= 2\int_{-1}^{1} e^t(t-1)\,dt = 2\Big[\, e^t(t-2)\,\Big]_{-1}^{1} = \boldsymbol{\frac{6}{e} - 2e}\end{aligned}$$

(2) $f(x) = e^{\sin x}(\sin 2x - 2\cos x)$ より

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{\sin x}\cos x(\sin 2x - 2\cos x) + e^{\sin x}(2\cos 2x + 2\sin x) \\ &= e^{\sin x}(\sin 2x\cos x - 2\cos^2 x + 2\cos 2x + 2\sin x) \\ &= e^{\sin x}\{2\sin x\cos^2 x - 2\cos^2 x + 2(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x\} \\ &= e^{\sin x}\{2\sin x(1 - \sin^2 x) - 2(1 - \sin^2 x) + 2(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x\} \\ &= e^{\sin x}(-2\sin^3 x - 2\sin^2 x + 4\sin x) \\ &= 2e^{\sin x}\sin x(1 - \sin x)(\sin x + 2)\end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↗	極大	↘	

よって，最大値は　$f(\pi) = \mathbf{2}$

(3) $g(x)=(x^2+2x-2)e^x$ とおくと　$g'(x)=x(x+4)e^x$

したがって，$x \geqq 0$ のとき　$g'(x) \geqq 0$　すなわち　$g(x)$ は単調増加

$h(x)=g(x)-f(x)$ とおくと

$$h(0)=g(0)-f(0)=-2-(-2)=0$$

$f(x)$ は基本周期 2π の周期関数であり，(2) の結果から，$0 \leqq x \leqq \pi$ において，$h(x) \geqq 0$ を示せばよい．$0 \leqq x \leqq \pi$ において，$x \geqq \sin x \geqq 0$ より

$$g'(x) \geqq g'(\sin x) \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

したがって
$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)-f'(x) \\ &\geqq g'(\sin x)-f'(x) \\ &= \sin x(\sin x+4)e^{\sin x}-2e^{\sin x}\sin x(1-\sin x)(\sin x+2) \\ &= e^{\sin x}\sin^2 x(2\sin x+3) \geqq 0 \end{aligned}$$

$x \geqq 0$ において，$h(x)$ は単調増加であるから

$$h(x) \geqq h(0)=0 \quad \text{ゆえに} \quad g(x)-f(x) \geqq 0$$

よって，$x \geqq 0$ のとき，$(x^2+2x-2)e^x \geqq f(x)$ が成立する．

別解
$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)-f'(x) \\ &= x(x+4)e^x-2e^{\sin x}\sin x(1-\sin x)(\sin x+2) \\ &= 4(xe^x-e^{\sin x}\sin x)+x^2e^x+2e^{\sin x}\sin^2 x(1+\sin x) \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $x \geqq \sin x$ であるから

$$xe^x-e^{\sin x}\sin x=(x-\sin x)e^x+(e^x-e^{\sin x})\sin x \geqq 0$$

したがって　$h'(x) \geqq 0$　■

11 (1) $f(x)=x^x\ (x>0)$ により，$g(x)=f(x)f(1-x)$ とおくと $(0<x<1)$

$$g(x)=x^x(1-x)^{1-x} \quad \text{ゆえに} \quad \log g(x)=x\log x+(1-x)\log(1-x)$$

上の第 2 式の両辺を微分すると

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\log x+x\cdot\frac{1}{x}-\log(1-x)+(1-x)\cdot\frac{-1}{1-x}=\log\frac{x}{1-x}$$

$g'(x)=g(x)\log\dfrac{x}{1-x}$ より，$g(x)$ の $\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}$ における増減表は

x	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$g\left(\frac{1}{4}\right)=g\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}=\frac{3^{\frac{3}{4}}}{4}, \quad g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

よって　$x=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4}$ のとき，**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{3^{\frac{3}{4}}}{4}}$，　$x=\dfrac{1}{2}$ のとき，**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) $a>0$ より，$ax>0$ かつ $a(1-x)>0$，すなわち，$0<x<1$ において

$$\begin{aligned}f(ax)f(a(1-x))&=(ax)^{ax}\{a(1-x)\}^{a(1-x)}\\&=a^{ax}x^{ax}a^{a(1-x)}(1-x)^{a(1-x)}\\&=a^a(x^x)^a\{(1-x)^{1-x}\}^a\\&=f(a)\{f(x)\}^a\{f(1-x)\}^a=f(a)\{g(x)\}^a\end{aligned}$$

$h(x)=\dfrac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ とおくと，上式および (1) の $g(x)$ を用いて

$$h(x)=\frac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}=\frac{g(x)f(a)}{f(a)\{g(x)\}^a}=\{g(x)\}^{1-a}$$

したがって，$g(x)$ の増減表により，

$1-a>0$，すなわち，$0<a<1$ のとき，$x=\dfrac{1}{2}$ で，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2^{1-a}}}$

$1-a=0$，すなわち，$a=1$ のとき，最小値 $\mathbf{1}$

$1-a<0$，すなわち，$1<a$ のとき，$x=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4}$ で，最小値 $\boldsymbol{\left(\dfrac{3^{\frac{3}{4}}}{4}\right)^{1-a}}$

■

12 (1) $f(t)=e^{-t}\left(1+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}\right)$ とおくと

$$f'(t)=-e^{-t}\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\right)+e^{-t}\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)=-\frac{t^3e^{-t}}{6}$$

$t>0$ で $f'(t)<0$ より，$t>0$ において $f(t)$ は単調減少あるから

$t>0$ において　$f(t)<f(0)$　ゆえに　$e^{-t}\left(1+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}\right)<1$

したがって　$t>0$ において　$e^t>1+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}$

(2) $y=xe^x$ より，$y'=(x+1)e^x$

曲線 $y=xe^x$ 上の点 $(t,\ te^t)$ における接線の方程式は

$$y-te^t=(t+1)e^t(x-t)\quad すなわち\quad y=(t+1)e^tx-t^2e^t$$

この接線が点 $(0,\ a)$ を通るから　$a=-t^2e^t$

$g(t)=-t^2e^t$ とおくと　$g'(t)=-2te^t-t^2e^t=-t(t+2)e^t$

t	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$	$-\frac{4}{e^2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$

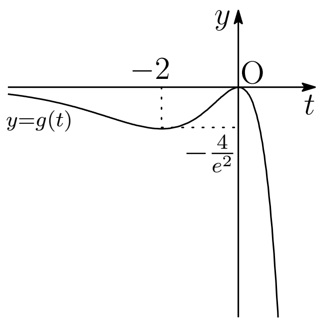
$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}(-t^2e^t)=-\infty$

(1) の結果から，$t>0$ において，$e^t>\dfrac{t^3}{6}$　ゆえに　$0<\dfrac{t^2}{e^t}<\dfrac{6}{t}$

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{6}{t}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t}=0$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}g(-t)=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t^2}{e^t}\right)=0$

求める接線の本数と $y=g(t)$ と $y=a$ の共有点の個数は等しいから



$a<-\dfrac{4}{e^2}$ のとき　1本

$a=-\dfrac{4}{e^2}$ のとき　2本

$-\dfrac{4}{e^2}<a<0$ のとき　3本

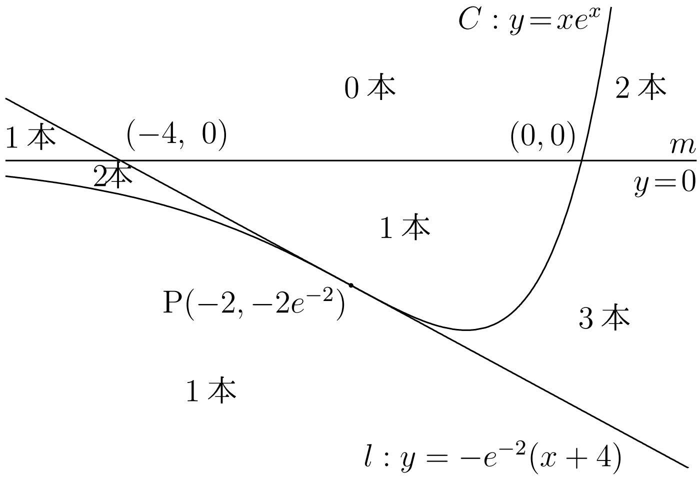
$a=0$ のとき　1本

$0<a$ のとき　0本

解説 曲線 $C : y = xe^x$ 上の変曲点 $\mathrm{P}(-2, -2e^{-2})$ における接線を $l : y = h(x)$ とすると

$$h(x) = -e^2(x + 4)$$

C の漸近線を $m : y = 0$ とすると，C, l, m を境界する領域から，C に引ける接線の本数は次のようになる．



ただし，境界線上においては次のようになる．

- 点 P からは C に 1 本の接線が引ける．
- 曲線 C 上の P 以外の点からは C に 2 本の接線が引ける．
- l 上の点 $(x,\ h(x))$ $(x \leqq -2)$ からは C に 1 本の接線が引ける．l 上の点 $(x,\ h(x))$ $(-2 < x)$ からは C に 2 本の接線が引ける．
- m 上の点 $(x,\ 0)$ $(x \leqq -4)$ からは C に 1 本の接線が引ける．m 上の点 $(x,\ 0)$ $(-4 < x < 0)$ からは C に接線は引けない．原点 $(0,\ 0)$ からは C に 1 本の接線が引ける．m 上の点 $(x,\ 0)$ $(0 < x)$ からは C に 2 本の接線が引ける．

補足 3 次関数のグラフに引ける接線の本数に関する出題は頻出である[1]．■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf $\boxed{6}$

13 (1) 1 から n までの自然数の中で $2^{f(n)}$ を因数にもつのは，$k=2^{f(n)}$ だけである．k を除く 1 から n までの自然数の逆数の和は

$$S_{\hat{k}}=1+\frac{1}{2}+\underset{\hat{k}}{\cdots}+\frac{1}{n}=\frac{A_n}{2^{f(n)-1}b_n}\quad (A_n\text{は整数},\ b_n\text{は奇数})$$

とかける．したがって

$$S_n=S_{\hat{k}}+\frac{1}{2^{f(n)}}=\frac{A_n}{2^{f(n)-1}b_n}+\frac{1}{2^{f(n)}}=\frac{2A_n+b_n}{2^{f(n)}b_n}$$

$a_n=2A_n+b_n$ とすると

$$S_n=\frac{a_n}{2^{f(n)}b_n}\quad (a_n,\ b_n\text{は奇数})$$

(2) $n\geqq 2$ のとき　$f(n)\geqq 1$

S_n $(n\geqq 2)$ を整数と仮定すると，(1) の結果より

$$S_n2^{f(n)}b_n=a_n$$

このとき，上式の左辺は偶数，右辺は奇数となり，矛盾．

よって，S_n は整数にならない．

(3) $S_{m,n}=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m+1}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ について $(m<n)$

(I) $m=1$ のとき

$$S_{1,n}=S_n\quad (n>1)$$

このとき，(2) の結果から，$S_{m,n}$ は整数ではない．

(II) $1<m$ のとき

$$S_{m,n}=S_n-S_{m-1}=\frac{a_n}{2^{f(n)}b_n}-\frac{a_{m-1}}{2^{f(m-1)}b_{m-1}}$$

(i) $f(m-1)<f(n)$ のとき，$p=f(n)-f(m-1)$ とおくと

$$S_{m,n}=\frac{a_nb_{m-1}-2^pa_{m-1}b_n}{2^{f(n)}b_nb_{m-1}}$$

これから　$S_{m,n}2^{f(n)}b_nb_{m-1}+2^pa_{m-1}b_n=a_nb_{m-1}$

$S_{m,n}$ が整数であると仮定すると，上式の左辺は偶数，右辺は奇数となり，矛盾．したがって，$S_{m,n}$ は整数ではない．

(ii) $f(m-1)=f(n)$ のとき

$$2^{f(n)} \leqq n < 2^{f(n)+1}, \quad 2^{f(m-1)} \leqq m-1 < 2^{f(m-1)+1}$$

このとき　$2^{f(n)} \leqq m-1 < m < n < 2^{f(n)+1}$

ゆえに　$\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{2^{f(n)}}$,

$n-m+1 = n-(m-1) < 2^{f(n)+1} - 2^{f(n)} = 2^{f(n)}$

したがって

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &< \underbrace{\frac{1}{2^{f(n)}} + \frac{1}{2^{f(n)}} + \cdots + \frac{1}{2^{f(n)}}}_{(n-m+1)\text{ 個}} \\ &= \frac{n-m+1}{2^{f(n)}} < 1 \end{aligned}$$

$S_{m,n} > 0$ であるから，$0 < S_{m,n} < 1$ より，$S_{m,n}$ は整数ではない.

(I)，(II) から，$S_{m,n}$ はどんな m, n $(m<n)$ に対しても整数にならない.

■