

平成 25 年度 千葉大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (中学数学を除く) [1] [2] [3] [4] (90 分) 数 I・A
- 文 (行動科学)・教育 (情報教育分野)・法政経済・園芸学部・先進科学プログラム (物理化学・生命科学・人間科学) [3] [4] [5] [6] (90 分) 数 I・II・A・B
- 教育 (中学数学) [1] [2] [3] [4] [5] [6] (150 分) 数 I・II・A・B
- 先進科学プログラム (物理・電気電子・ナノサイエンス・画像科学・情報画像) [3] [4] [5] [6] [7] (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 理 (物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・ [3] [4] [5] [6] [7] (120 分)
数 I・II・III・A・B・C
- 医学部 [4] [5] [6] [8] [9] (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (数学・情報数理) [4] [5] [6] [7] [8] [10] (180 分)
数 I・II・III・A・B・C

- [1] a, b を正の整数とする. このとき, 関数

$$y = \left| x^2 - ax + \frac{a^2}{2} - 5 \right|$$

のグラフと直線 $y = b$ との共有点を考える.

- (1) 共有点が 3 個になるような (a, b) の組をすべて求めよ.
 - (2) 共有点が 1 個になるような (a, b) の組のうち, b が最小になるものを求めよ.
- [2] a, b を 100 以下の正の整数とする. 2 つの分数 $\frac{a}{27}, \frac{31}{b}$ がどちらも既約分数であり, かつ, 和 $\frac{a}{27} + \frac{31}{b}$ が整数であるとする. このような (a, b) の組をすべて求めよ.
- [3] 1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において, 辺 BC を 1 : 2 に内分する点を D とする. また, 辺 OC 上に点 E をとり, $CE = t$ とする.

- (1) AD の長さを求めよ.
- (2) $\cos \angle DAE$ を t を用いて表せ.
- (3) $\triangle ADE$ の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ.

- 4 1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある．これらを実験として 1 列に並べる試行を行う．

- (1) 下記の条件 (A) が成り立つ確率を求めよ．
- (2) 下記の条件 (B) が成り立つ確率を求めよ．
- (3) 条件 (A), (B) が同時に成り立つ確率を求めよ．

ただし、条件 (A), (B) は次のとおりである．

(A) 番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない．

(B) 番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には、ちょうど 1 枚のカードがある．

- 5 a, b を実数とし、 $a > 0$ とする．放物線 $y = \frac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $A\left(a, \frac{a^2}{4}\right)$, $B\left(b, \frac{b^2}{4}\right)$ をとる．点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ ℓ_A と n_A 、点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ ℓ_B と n_B とおいたとき、 ℓ_A と ℓ_B が直交しているものとする．2 つの接線 ℓ_A, ℓ_B の交点を P とし、2 つの法線 n_A, n_B の交点を Q とする．

- (1) b を a を用いて表せ．
- (2) P, Q の座標を a を用いて表せ．
- (3) 長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と、そのときの面積を求めよ．

- 6 整数 p, q ($p \geq q \geq 0$) に対して 2 項係数を ${}_pC_q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める．なお $0! = 1$ とする．

- (1) n, k が 0 以上の整数のとき、

$${}_{n+k+1}C_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}C_k} \right)$$

を計算し、 n によらない値になることを示せ．

- (2) m が 3 以上の整数のとき、和 $\frac{1}{{}_3C_3} + \frac{1}{{}_4C_3} + \frac{1}{{}_5C_3} + \cdots + \frac{1}{{}_mC_3}$ を求めよ．

- 7 a は 0 でない実数とする．直線 $y = ax$ と曲線 $y = x \log(x+1)$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

8 r を 1 より大きい実数とする. 半径 1 の円 C の周上に点 Q をとる. 最初に円 C の中心 P は座標平面の $(0, 1)$, 点 Q は $(0, 2)$ にあるものとし, 円 C が x 軸に接しながら x 軸の正の方向にすべることなく転がっていく. 角 θ ラジアンだけ回転したとき, 半直線 PQ 上に $PR = r$ となる点 R をとる. θ を 0 から 2π まで動かしたときの R の軌跡を考える.

(1) α, β は $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ をみたし, $\theta = \alpha$ のときの R の座標と $\theta = \beta$ のときの R の座標とが一致するものとする. $t = \frac{\beta - \alpha}{2}$ とおくとき, r を t を用いて表せ.

(2) (1) において, θ を α から β まで動かしたときの R の軌跡によって囲まれた図形の面積を S とする. S を t を用いて表せ.

(3) $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S}{r^2}$ を求めよ.

9 $m^4 + 14m^2$ が $2m + 1$ の整数倍となるような整数 m をすべて求めよ.

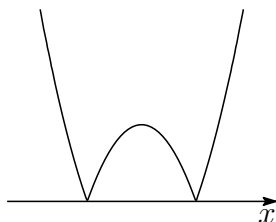
10 $\tan 10^\circ = \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ$ を示せ.

解答例

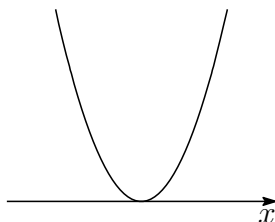
$$\boxed{1} \quad (1) \quad y = \left| x^2 - ax + \frac{a^2}{2} - 5 \right| = \left| \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{a^2}{4} - 5 \right| \quad \dots (*)$$

したがって、このグラフの x 軸との位置関係は次のようになる。

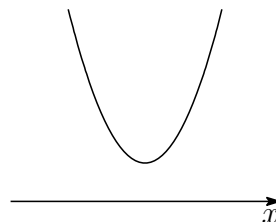
$$(i) \quad \frac{a^2}{4} - 5 < 0$$



$$(ii) \quad \frac{a^2}{4} - 5 = 0$$



$$(iii) \quad \frac{a^2}{4} - 5 > 0$$



このグラフと直線 $y = b$ の共有点が 3 個であるのは、(i) の場合で、直線 $y = b$ が曲線と点 $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + 5 \right)$ で接するときであるから

$$b = -\frac{a^2}{4} + 5$$

よって、これを満たす正の整数 a, b は $(a, b) = (2, 4), (4, 1)$

(2) a は正の整数であるから、グラフ (*) が (ii) のように、 x 軸と接することはない。

グラフ (*) と直線 $y = b$ の共有点が 1 個であるのは、(iii) の場合で、直線 $y = b$ が曲線 (*) と点 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4} - 5 \right)$ で接するときであるから

$$b = \frac{a^2}{4} - 5$$

よって、 b が最小となる正の整数 a, b は $(a, b) = (6, 4)$ ■

2 $\frac{a}{27} + \frac{31}{b} = \frac{ab + 27 \cdot 31}{27b} = m$ とおくと (m は整数)

$$ab + 27 \cdot 31 = 27bm \quad \text{ゆえに} \quad ab = 27(bm - 31) \quad \dots \textcircled{1}$$

a と 27 は互いに素であるから, b は 27 の倍数で, $1 \leq b \leq 100$ であるから

$$b = 27k \quad (k = 1, 2, 3)$$

とおける. これを ① に代入すると

$$27ak = 27(27km - 31) \quad \text{ゆえに} \quad k(27m - a) = 31$$

k ($k = 1, 2, 3$) は 31 の因数であるから, $k = 1$ より

$$b = 27, \quad a = 27m - 31$$

a は 27 と互いに素で, $1 \leq a \leq 100$ であるから $m = 2, 3, 4$

よって $(a, b) = (23, 27), (50, 27), (77, 27)$ ■

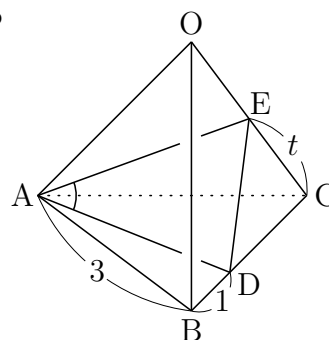
- 3** (1) D は線分 BC (= 3) を 1 : 2 に内分する点であるから

$$BD = 1$$

$\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos 60^\circ \\ &= 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 7 \end{aligned}$$

$$AD > 0 \text{ より } AD = \sqrt{7}$$



(2) $CD = AB - BD = 3 - 1 = 2$. $\triangle CDE$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} DE^2 &= CD^2 + CE^2 - 2 \cdot CD \cdot CE \cos 60^\circ \\ &= 2^2 + t^2 - 2 \cdot 2 \cdot t \cdot \frac{1}{2} \\ &= t^2 - 2t + 4 \end{aligned}$$

$OE = OC - CE = 3 - t$. $\triangle OAE$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AE^2 &= OA^2 + OE^2 - 2 \cdot OA \cdot OE \cos 60^\circ \\ &= 3^2 + (3 - t)^2 - 2 \cdot 3 \cdot (3 - t) \cdot \frac{1}{2} \\ &= t^2 - 3t + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \cos \angle DAE &= \frac{AD^2 + AE^2 - DE^2}{2AD \cdot AE} \\ &= \frac{7 + (t^2 - 3t + 9) - (t^2 - 2t + 4)}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}} \\ &= \frac{12 - t}{2\sqrt{7(t^2 - 3t + 9)}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \sin^2 \angle DAE &= 1 - \cos^2 \angle DAE = 1 - \frac{(12 - t)^2}{28(t^2 - 3t + 9)} \\ &= \frac{3(9t^2 - 20t + 36)}{28(t^2 - 3t + 9)} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } \sin \angle DAE = \frac{\sqrt{3(9t^2 - 20t + 36)}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}} = \frac{\sqrt{3(9t^2 - 20t + 36)}}{2AD \cdot AE}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \triangle ADE &= \frac{1}{2} AD \cdot AE \sin \angle DAE = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{9t^2 - 20t + 36} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{9 \left(t - \frac{10}{9} \right)^2 + \frac{224}{9}} \end{aligned}$$

$$0 < t < 3 \text{ に注意して, } t = \frac{10}{9} \text{ のとき, 最小値 } \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{224}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

■

- 4 (1) 番号1から番号9の9枚のカードの並べ方の総数は $9!$ (通り)
 番号1, 2のカードが隣り合うとき, これらをひとまとめにする.
 ひとまとめの番号1, 2のカードと残り7枚の並べ方は $8!$ (通り)
 また, ひとまとめの番号1, 2のカードの並べ方は $2!$ (通り)
 したがって, 番号1, 2のカードが隣り合う確率は $\frac{8! \cdot 2}{9!} = \frac{2}{9}$
 求める確率は, この余事象の確率であるから $1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$
- (2) 番号8と番号9のカードの間に1枚のカードがあるとき, これら3枚のカードをひとまとめにする.
 ひとまとめの3枚のカードと残り6枚のカードの並べ方は $7!$
 ひとまとめの番号8, 9のカードの並べ方は $2!$ (通り)
 番号8, 9のカードの間にカードが1枚入る場合の数は 7 (通り)
- よって, 求める確率は $\frac{7! \cdot 2! \cdot 7}{9!} = \frac{7}{36}$
- (3) 条件 (A), (B) を満たす確率をそれぞれ $P(A)$, $P(B)$ とすると

$$P(A) = \frac{7}{9}, \quad P(B) = \frac{7}{36}$$

番号1, 2が隣り合い, 番号8, 9のカードの間にカードが1枚入る確率は

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{6! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 5}{9!} = \frac{5}{126}$$

よって, 求める確率は

$$P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B) = \frac{7}{36} - \frac{5}{126} = \frac{13}{84}$$

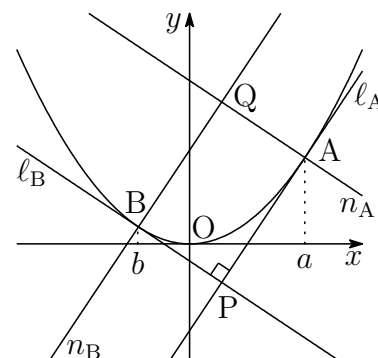
■

- 5 (1) $f(x) = \frac{x^2}{4}$ とおくと $f'(x) = \frac{x}{2}$
 曲線 $y = f(x)$ 上の2点 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$
 における接線の傾きはそれぞれ

$$f'(a) = \frac{a}{2}, \quad f'(b) = \frac{b}{2}$$

このとき, $f'(a)f'(b) = -1$ であるから

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = -1 \quad \text{よって} \quad b = -\frac{4}{a}$$



(2) ℓ_A は、点 $(a, f(a))$ を通り、傾き $f'(a)$ の直線であるから

$$y - \frac{a^2}{4} = \frac{a}{2}(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{a}{2}x - \frac{a^2}{4}$$

同様に、 ℓ_B の方程式は $y = \frac{b}{2}x - \frac{b^2}{4}$

ℓ_A と ℓ_B の連立方程式を解くと $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{ab}{4}$

よって、点 P の座標は (1) の結果により $P\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}, -1\right)$

n_A は、点 $A(a, f(a))$ を通り、傾き $-\frac{1}{f'(a)}$ の直線であるから

$$y - \frac{a^2}{4} = -\frac{2}{a}(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{2}{a}x + \frac{a^2}{4} + 2$$

同様に、 n_B の方程式は $y = -\frac{2}{b}x + \frac{b^2}{4} + 2$

n_A と n_B の連立方程式を解くと $x = -\frac{ab}{8}(a+b)$, $y = \frac{a^2 + ab + b^2}{4} + 2$

よって、点 Q の座標は (1) の結果により $Q\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}, \frac{a^2}{4} + 1 + \frac{4}{a^2}\right)$

(3) P, Q の x 座標が等しいから $PQ = \frac{a^2}{4} + 1 + \frac{4}{a^2} - (-1) = \left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\right)^2$

A, B の x 座標の差は、 $a > 0$ に注意して $a - b = a - \left(-\frac{4}{a}\right) = 2\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\right)$

したがって、長方形 AQBP の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\right)^2 \cdot 2 \left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\right) = \left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\right)^3$$

2つの正の数 $\frac{a}{2}$ と $\frac{2}{a}$ の相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{2} + \frac{2}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a}} = 2$$

上式において、等号が成立するとき $\frac{a}{2} = \frac{2}{a}$ すなわち $a = 2$

よって、 $a = 2$ のとき、 S は最小値 8 をとる。 ■

6 (1)

$$\begin{aligned}
& {}_{n+k+1}C_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}C_k} \right) \\
&= \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!n!} \left\{ \frac{k!n!}{(n+k)!} - \frac{k!(n+1)!}{(n+k+1)!} \right\} \\
&= \frac{1}{k+1} \{ (n+k+1) - (n+1) \} = \frac{k}{k+1}
\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{1}{{}_{n+k+1}C_{k+1}} = \frac{k+1}{k} \left(\frac{1}{{}_{n+k}C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}C_k} \right)$$

上式に $k = 2$ を代入すると

$$\frac{1}{{}_{n+3}C_3} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{{}_{n+2}C_2} - \frac{1}{{}_{n+3}C_2} \right)$$

したがって、 m が 3 以上の整数のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m-3} \frac{1}{{}_{n+3}C_3} &= \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{m-3} \left(\frac{1}{{}_{n+2}C_2} - \frac{1}{{}_{n+3}C_2} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{{}_2C_2} - \frac{1}{{}_mC_2} \right) \\
&= \frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{m(m-1)} \right\} = \frac{3(m+1)(m-2)}{2m(m-1)}
\end{aligned}$$

■

7 $y = x \log(x+1)$ より ($x > -1$) $y' = \log(x+1) + 1 - \frac{1}{x+1}$

$$y'' = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2} > 0$$

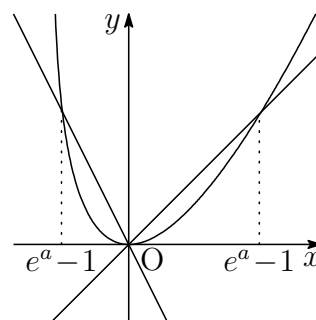
したがって、曲線 $y = x \log(x+1)$ は下に凸である。

直線 $y = ax$ ($a \neq 0$) と曲線 $y = x \log(x+1)$ の共有点の x 座標は

$$x \log(x+1) = ax$$

ゆえに $x \{\log(x+1) - a\} = 0$

これを解いて $x = 0, e^a - 1$



直線 $y = ax$ と曲線 $y = x \log(x+1)$ で囲まれる図形の面積を S とする。

(i) $a > 0$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{e^a-1} \{ax - x \log(x+1)\} dx \\ &= \left[\frac{a}{2} x^2 - \frac{1}{2} (x+1)^2 \log(x+1) + \frac{1}{4} (x+1)^2 + (x+1) \log(x+1) - x \right]_0^{e^a-1} \\ &= \frac{e^{2a}}{4} - e^a + \frac{a}{2} + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(ii) $a < 0$ のとき, (i) の結果により

$$\begin{aligned} S &= \int_{e^a-1}^0 \{ax - x \log(x+1)\} dx \\ &= - \int_0^{e^a-1} \{ax - x \log(x+1)\} dx \\ &= - \frac{e^{2a}}{4} + e^a - \frac{a}{2} - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

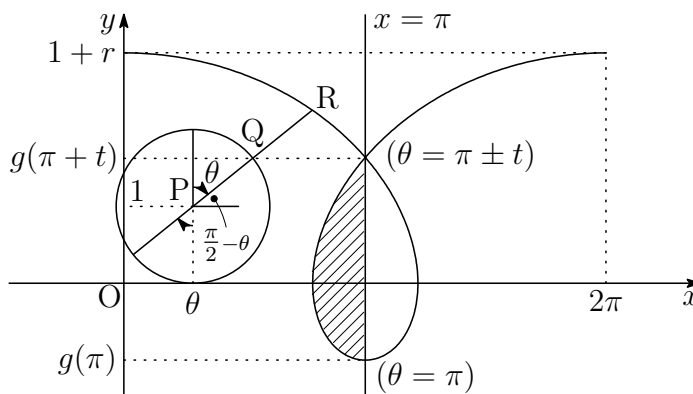
補足

$$\begin{aligned} \int x \log(x+1) dx &= \int \{(x+1) \log(x+1) - \log(x+1)\} dx \\ &= \int \left\{ \frac{1}{2} (x+1)^2 \right\}' \log(x+1) dx - \int (x+1)' \log(x+1) dx \\ &= \frac{1}{2} (x+1)^2 \log(x+1) - \frac{1}{4} (x+1)^2 - (x+1) \log(x+1) + x + C \end{aligned}$$

■

8 (1) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{PR} = r \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$

したがって $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} \theta + r \sin \theta \\ 1 + r \cos \theta \end{pmatrix}$



$\theta = \alpha$ のときと $\theta = \beta$ のときの R の座標が一致するから

$$\alpha + r \sin \alpha = \beta + r \sin \beta, \quad 1 + r \cos \alpha = 1 + r \cos \beta \quad (*)$$

上の第2式から ($r \neq 0$) $\cos \alpha = \cos \beta$ このとき, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ より
($y = \cos x$ のグラフは, 直線 $x = \pi$ に関して対称)

$$\beta + \alpha = 2\pi \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, $t = \frac{\beta - \alpha}{2}$ より $\beta - \alpha = 2t \quad \cdots \textcircled{2}$

①, ② を解いて $\alpha = \pi - t, \beta = \pi + t$

これらを (*) の第1式に代入すると

$$\pi - t + r \sin(\pi - t) = \pi + t + r \sin(\pi + t) \quad \text{ゆえに} \quad r \sin t = t \quad (**)$$

$$0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi, \quad t = \frac{\beta - \alpha}{2} \text{ より} \quad 0 < t \leq \pi$$

$t = \pi$ のとき, $\alpha = 0, \beta = 2\pi$ となり, これは (*) の第1式を満たさない.

したがって, $0 < t < \pi$ よって, (**) より $r = \frac{t}{\sin t}$

(2) 点 R の座標 (x, y) を $x = f(\theta)$, $y = g(\theta)$ とおくと

$$f(\theta) = \theta + r \sin \theta, \quad g(\theta) = 1 + r \cos \theta$$

このとき $f(\pi + \theta) + f(\pi - \theta) = 2\pi$, $g(\pi + \theta) = g(\pi - \theta)$

したがって, R の描く軌跡は, 直線 $x = \pi$ に関して対称である.

$$\begin{aligned}
 \frac{S}{2} &= \int_{g(\pi)}^{g(\pi+t)} (\pi - x) dy \\
 &= \int_{\pi}^{\pi+t} \{\pi - f(\theta)\} g'(\theta) d\theta \\
 &= \int_{\pi}^{\pi+t} (\pi - \theta - r \sin \theta)(-r \sin \theta) d\theta \\
 &= r \int_{\pi}^{\pi+t} (-\pi \sin \theta + \theta \sin \theta) d\theta + r^2 \int_{\pi}^{\pi+t} \sin^2 \theta d\theta \\
 &= r \left[\pi \cos \theta - \theta \cos \theta + \sin \theta \right]_{\pi}^{\pi+t} + r^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{\pi}^{\pi+t} \\
 &= r(t \cos t - \sin t) + r^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \right) \tag{A} \\
 &= \frac{t}{\sin t} (t \cos t - \sin t) + \frac{t^2}{\sin^2 t} \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin t \cos t \right) \\
 &= \frac{t^2 \cos t}{2 \sin t} + \frac{t^3}{2 \sin^2 t} - t
 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad S = \frac{t^2 \cos t}{\sin t} + \frac{t^3}{\sin^2 t} - 2t$$

$$(3) \text{ (A) より } \frac{S}{r^2} = \frac{2}{r} (t \cos t - \sin t) + t - \frac{1}{2} \sin 2t$$

$r \rightarrow \infty$ のとき, (1) の結果から $t \rightarrow \pi$ よって, 上式より

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S}{r^2} = \pi$$

■

9 $m^4 + 14m^2 = m^2(m^2 + 14)$

m と $2m + 1$ は互いに素であるから, $m^2 + 14$ は $2m + 1$ で割り切れる.

$2m + 1$ は奇数であるから, $4(m^2 + 14)$ が $2m + 1$ で割り切れる整数 m を求めればよい. $4(m^2 + 14) = (2m + 1)(2m - 1) + 57$ より

$$\frac{4(m^2 + 14)}{2m + 1} = 2m - 1 + \frac{57}{2m + 1}$$

このとき, 上式の左辺が整数であるから

$$2m + 1 = -57, -19, -3, -1, 1, 3, 19, 57$$

よって $m = -29, -10, -2, -1, 0, 1, 9, 28$ ■

10 $\tan 10^\circ = x$ とおくと

$$\begin{aligned}\tan 20^\circ &= \tan(30^\circ - 10^\circ) = \frac{\tan 30^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 30^\circ \tan 10^\circ} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - x}{1 + \frac{x}{\sqrt{3}}} = \frac{1 - \sqrt{3}x}{\sqrt{3} + x} \\ \tan 40^\circ &= \tan(30^\circ + 10^\circ) = \frac{\tan 30^\circ + \tan 10^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 10^\circ} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + x}{1 - \frac{x}{\sqrt{3}}} = \frac{1 + \sqrt{3}x}{\sqrt{3} - x}\end{aligned}$$

上の 2 式の辺々を掛けると

$$\tan 20^\circ \tan 40^\circ = \frac{(1 - \sqrt{3}x)(1 + \sqrt{3}x)}{(\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x)} = \frac{1 - 3x^2}{3 - x^2} \quad (*)$$

$$\tan 20^\circ = \frac{2 \tan 10^\circ}{1 - \tan^2 10^\circ} = \frac{2x}{1 - x^2} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}\tan 30^\circ &= \tan(20^\circ + 10^\circ) = \frac{\tan 20^\circ + \tan 10^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 10^\circ} \\ &= \frac{\frac{2x}{1 - x^2} + x}{1 - \frac{2x}{1 - x^2} \cdot x} = \frac{x(3 - x^2)}{1 - 3x^2} \quad (**)\end{aligned}$$

(*), (**) の辺々を掛けると

$$\tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ = \frac{1 - 3x^2}{3 - x^2} \times \frac{x(3 - x^2)}{1 - 3x^2} = x = \tan 10^\circ$$

■