

平成 20 年度 千葉大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (算数科選修) [1] [2] [3] [4] (90 分) 数 I・A
- 教育学部 (理科教育・技術科教育) [2] [3] [4] [5] (90 分) 数 I・A
- 文 (行動科学)・法経学部 [4] [5] [6] [7] (90 分) 数 I・II・A・B
- 園芸学部・教育 (情報教育分野) [2] [3] [6] [7] (90 分) 数 I・II・A・B
- 教育 (数学科教育分野) [2] [3] [5] [6] [7] [8] (150 分) 数 I・II・A・B
- 理学部 (生物学科, 地球科学科), 工学部 (建築学科, 都市環境システム学科, デザイン学科) [3] [4] [6] [7] [9] (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (物理学科, 化学科), 薬学部・工学部 (機械工学科, メディカルシステム工学科, 電気電子工学科, ナノサイエンス学科, 共生応用化学科, 画像科学科, 情報画像学科), 先進科学プログラム [5] [7] [8] [9] [10] (120 分)
数 I・II・III・A・B・C
- 医学部 [5] [8] [10] [11] [12] (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (数学・情報数理) [5] [7] [8] [9] [10] [12] (180 分)
数 I・II・III・A・B・C

[1] $\triangle ABC$ において $BC = 2$, $\angle B + \angle C = 60^\circ$ とする.

- (1) このような三角形の面積の最大値を求めよ. そのときの 2 辺 AB , AC の長さを求めよ.
- (2) (1) で得た三角形の内接円の半径を求めよ.

[2] m を実数とする. 関数 $y = |x|(x - 4) - x - m$ のグラフが x 軸と相異なる 3 点で交わるような m の値の範囲を求めよ.

[3] 正三角形 ABC は, 1 辺の長さが 1 である正六角形の辺上に 3 頂点をもつとする.

- (1) このような正三角形 ABC の 1 辺の長さ AB の最大値と最小値を求めよ.
- (2) 頂点 A が正六角形の 1 辺を $1:2$ に内分しているとき AB^2 を求めよ.

- 4 n を自然数とする. 1 個のさいころを続けて 2 回投げ, 1 回目に出た目の数を x , 2 回目に出た目の数を y とする. $|x - n| + |y - n| \leq n$ となる確率を P_n で表すとき, 次の問いに答えよ.

- (1) P_1 を求めよ.
- (2) P_n が最大となる n を求め, そのときの P_n を求めよ.
- (3) $P_n = \frac{1}{36}$ となる n を求めよ.

- 5 以下の問いに答えよ.

- (1) x を有理数とする. $7x^2$ が整数ならば, x は整数であることを示せ.
- (2) a, b を整数とする. $a^2 - 7b^2$ が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数であることを示せ.
- (3) r は整数, s は有理数とする. $\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 7s^2$ が整数ならば, s は整数であることを示せ.

- 6 2 次関数 $f(x)$ は

$$xf(x) = \frac{2}{3}x^3 + (x^2 + x) \int_0^1 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

を満たすとする.

- (1) $f(x)$ を求めよ.
- (2) 関数 $xf(x)$ の $x \geq 0$ における最小値を求めよ.

- 7 平面上の $\triangle ABC$ において, 辺 AB を 4 : 3 に内分する点を D , 辺 BC を 1 : 2 に内分する点を E とし, 線分 AE と CD の交点を O とする.

- (1) $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{q}$ とするとき, ベクトル $\overrightarrow{AO}$ を $\vec{p}$, $\vec{q}$ で表せ.
- (2) 点 O が $\triangle ABC$ の外接円の中心になるとき, 3 辺 AB , BC , CA の長さの 2 乗の比を求めよ.

- 8** 1 から n までの番号が書かれた n 枚のカードがある. この n 枚のカードの中から 1 枚を取り出し, その番号を記録してからもとに戻す. この操作を 3 回繰り返す. 記録した 3 個の番号が 3 つとも異なる場合には大きい方から 2 番目の値を X とする. 2 つが一致し, 1 つがこれと異なる場合には, 2 つの同じ値を X とし, 3 つとも同じならその値を X とする.

- (1) 確率 $P(X \leq k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を求めよ.
- (2) 確率 $P(X = k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を求めよ.
- (3) $P(X = k)$ が最大となる k の値はいくつか.

- 9** 関数 $y = \log |x|$ のグラフ G 上に動点 A, B があり, それぞれの x 座標を a, b とする. A における接線と B における接線が直交し, $a > 0$ であるとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) ab を求めよ.
- (2) 線分 AB の中点の存在範囲を求めよ.
- (3) 直線 AB が点 $(1, 0)$ を通り, $a \neq 1$ を満たすとき, 直線 AB と G で囲まれる図形の面積を求めよ.

- 10** 行列

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ.

- (1) $A^m = E$ となる最小の自然数 m と, $B^n = E$ となる最小の自然数 n を求めよ.
 - (2) m は (1) で求めた値とし, k は $1 \leq k \leq m$ を満たす自然数とする. 単位円周上の点 P に対し, 行列 B, A^2, A^k で表される移動による P の行先を, それぞれ Q, R, S とする. $\triangle QRS$ が正三角形となるような k, P の組をすべて求めよ.
- 11** 実数 a, b は $0 < a < b$ を満たし, x, y, z はいずれも a 以上かつ b 以下であるとする. このとき次を示せ.

- (1) $x + y = a + b$ ならば, $xy \geq ab$ である.
- (2) $x + y + z = a + 2b$ ならば, $xyz \geq ab^2$ である.

12 $c \geq 0$ に対して，連立不等式

$$0 \leq x \leq \frac{4\pi}{3}, \quad 0 \leq y \leq |\sin x - c|$$

で表される座標平面上の図形を A とする．

- (1) A の面積 S を最小にするような c の値と，そのときの S を求めよ．
- (2) A を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とする． V を最小にするような c の値と，そのときの V を求めよ．

解答例

- 1** (1) $B + C = 60^\circ$ より, $A = 120^\circ$. $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$2^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 120^\circ \quad \text{ゆえに} \quad b^2 + bc + c^2 = 4$$

$$\text{したがって} \quad (b - c)^2 + 3bc = 4 \quad \text{ゆえに} \quad bc = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(b - c)^2$$

$b = c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき, bc は最大となるから, $\triangle ABC$ の面積の最大値は

$$\frac{1}{2}bc \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad AB = AC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

別解 $\triangle ABC$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{2}{\sin 120^\circ} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin B, \quad c = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin C$$

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc \sin 120^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin B \sin C \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \{\cos(B - C) - \cos(B + C)\} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left\{ \cos(B - C) - \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

$B - C = 0^\circ$, すなわち, $B = C = 30^\circ$ のとき, S は最大値 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ をとる.

$$\text{このとき} \quad b = c = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- (2) $\triangle ABC$ の内接円の半径を r , 面積を S とすると

$$\frac{1}{2}r(AB + BC + CA) = S$$

これに (1) の結果を代入すると

$$\frac{1}{2}r \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

これを解いて $r = 2 - \sqrt{3}$ ■

2 $y = |x|(x - 4) - x - m$ のグラフが x 軸と相異なる 3 点で交わる時、方程式

$$|x|(x - 4) - x - m = 0 \quad \text{すなわち} \quad |x|(x - 4) - x = m$$

が異なる 3 つの実数解をもてばよい。

したがって

$$y = |x|(x - 4)$$

のグラフと直線 $y = m$ が相異なる 3 点で交わる m の値の範囲を求めればよい。

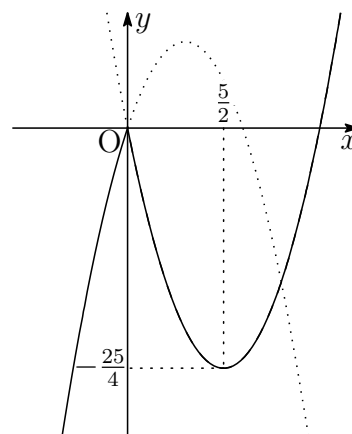
(i) $x \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} y &= x(x - 4) - x \\ &= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \end{aligned}$$

(ii) $x < 0$ のとき

$$\begin{aligned} y &= -x(x - 4) - x \\ &= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

よって、求める m の値の範囲は $-\frac{25}{4} < m < 0$



- 3** (1) 1 辺の長さが 1 の正六角形 PQRSTU に内接する正三角形 ABC の頂点 A は、一般性を失うことなく辺 PQ 上にあるものとし、辺 PQ, RS, TU の延長線の交点を右の図のように D, E, F とする.
 $\alpha = \angle DAB$, $\beta = \angle DBA$ とおくと

$$\alpha + \beta = 120^\circ$$

内接する正三角形 ABC の角により

$$\angle DAB = \angle EBC = \angle FCA = \alpha$$

$$\angle DBA = \angle ECB = \angle FAC = \beta$$

上式および $AB = BC = CA$ より $\triangle ADB \equiv \triangle BEC \equiv \triangle CFA$

これから $AQ = BS = CU$, $PA = RB = TC$

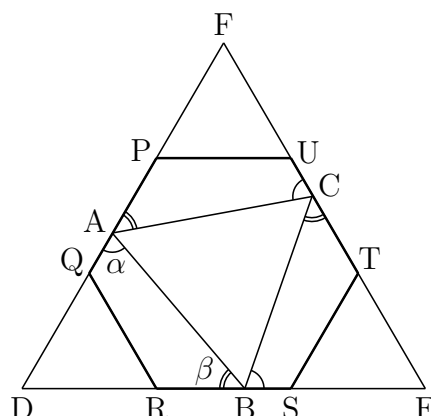
$AQ = x$ とすると ($0 \leq x \leq 1$), $RB = 1 - x$, $DQ = DR = 1$ であるから,
 $DA = 1 + x$, $DB = 2 - x$. $\triangle ADB$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AB^2 &= DA^2 + DB^2 - 2DA \cdot DB \cos 60^\circ \\ &= (1+x)^2 + (2-x)^2 - 2(1+x)(2-x) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 3x^2 - 3x + 3 \\ &= 3 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{9}{4} \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

よって AB は $x = 0, 1$ のとき最大値 $\sqrt{3}$, $x = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{3}{2}$ をとる.

- (2) $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ を (*) に代入して

$$AB^2 = 3 \cdot \frac{1}{36} + \frac{9}{4} = \frac{7}{3}$$



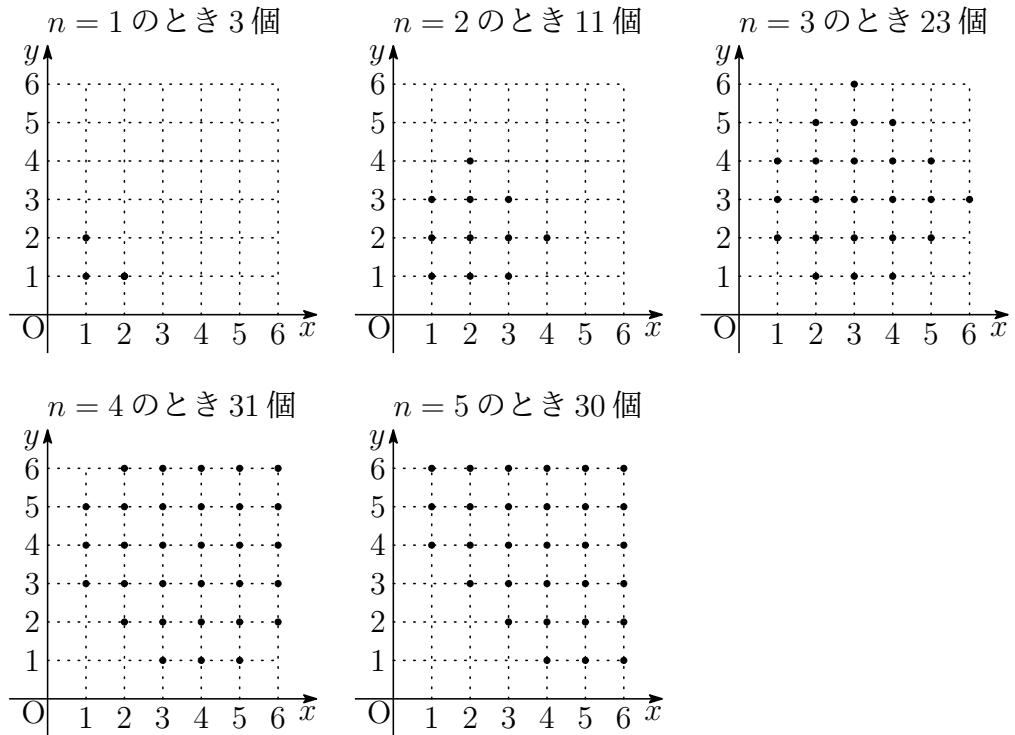
- 4 (1) $n = 1$ のとき, $|x - 1| + |y - 1| \leq 1$

これを満たす (x, y) の組は $(1, 1), (1, 2), (2, 1)$ の 3 個

$$\text{よって } P_1 = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$$

- (2) $|x - n| + |y - n| \leq n \cdots (*)$ となる確率は P_n は, $1 \leq n \leq 5$ のとき

$$P_1 = \frac{3}{36}, \quad P_2 = \frac{11}{36}, \quad P_3 = \frac{23}{36}, \quad P_4 = \frac{31}{36}, \quad P_5 = \frac{30}{36}$$



$n \geq 6$ のとき, $(*)$ は $(n - x) + (n - y) \leq n$ ゆえに $x + y \geq n \cdots (**)$
 $x + y = 12$ は 1 個, $x + y = 11$ は 2 個, $x + y = 10$ は 3 個, $x + y = 9$ は 4 個, $x + y = 8$ は 5 個, $x + y = 7$ は 6 個, $x + y = 6$ は 5 個あるから

$$\begin{aligned} P_{12} &= \frac{1}{36}, & P_{11} &= \frac{1+2}{36} = \frac{3}{36}, & P_{10} &= \frac{3+3}{36} = \frac{6}{36}, \\ P_9 &= \frac{6+4}{36} = \frac{10}{36}, & P_8 &= \frac{10+5}{36} = \frac{15}{36}, & P_7 &= \frac{15+6}{36} = \frac{21}{36}, \\ P_6 &= \frac{21+5}{36} = \frac{26}{36} \end{aligned}$$

よって, P_n が最大となるとき $n = 4, P_4 = \frac{31}{36}$

- (3) (2) の結果から $n = 12$ ■

- 5** (1) 有理数 x を互いに素である 2 整数 p, q ($q > 0$) を用いて $x = \frac{p}{q}$ とおくと

$$7x^2 = 7 \left(\frac{p}{q} \right)^2 = \frac{7}{q^2} \cdot p^2$$

が整数であるとき、 q^2 が p^2 と互いに素であるから、 q^2 は 7 の約数となる。
これを満たす整数 q は

$$q = 1 \quad \text{したがって} \quad x = p$$

よって、 x は整数である。

- (2) 整数 n が法 4 に関して

$$n \equiv 0, 2 \text{ のとき } n^2 \equiv 0, \quad n \equiv \pm 1 \text{ のとき } n^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

法 4 に関して $n^2 \equiv 0$ または $n^2 \equiv 1$ であることに注意すると

$$a^2 - 7b^2 \equiv a^2 + b^2 \equiv 0 \iff a^2 \equiv b^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

よって、 a と b はともに偶数である。

- (3) $\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 7s^2$ が整数ならば

$$r^2 - 7(2s)^2 \dots (*)$$

は 4 の倍数である。また、 r は整数であるから、 $7(2s)^2$ は整数である。

(1) の結論から、 $2s$ は整数である。

このとき、 r および $2s$ が整数であるから、これを (2) の結論に適用すると、 $2s$ は偶数、すなわち、 s は整数である。 ■

6 (1) $xf(x) = \frac{2}{3}x^3 + (x^2 + x) \int_0^1 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$ より

$$f(x) = \frac{2}{3}x^2 + (x+1) \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

$x \rightarrow 0$ とすると, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(0)$ により

$$f(0) = \int_0^1 f(t) dt + f(0) \quad \text{ゆえに} \quad \int_0^1 f(t) dt = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

したがって $xf(x) = \frac{2}{3}x^3 + \int_0^x f(t) dt$

上式の両辺を微分すると

$$f(x) + xf'(x) = 2x^2 + f(x) \quad \text{ゆえに} \quad f'(x) = 2x$$

$f(x) = x^2 + c$ とおいて (c は定数), $\textcircled{1}$ に代入すると

$$\int_0^1 (t^2 + c) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + ct \right]_0^1 = \frac{1}{3} + c = 0$$

ゆえに $c = -\frac{1}{3}$ よって $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

補足 $f(x)$ が整関数であるから, $xf'(x) = 2x^2$ について $x \neq 0$ と $x = 0$ の場合に分けて求める必要はない. $f(x)$, $f'(x)$ は連続で次式が保証されている.

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

なお, 本題では $f(x)$ が 2 次関数というヒントが与えてあるから

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

とおいて求めてもよいが, 計算は煩雑である.

(2) $g(x) = xf(x)$ とおくと $g(x) = x^3 - \frac{1}{3}x$, $g'(x) = 3x^2 - \frac{1}{3}$

x	0	$\dots$	$\frac{1}{3}$	$\dots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{27}$	$\nearrow$

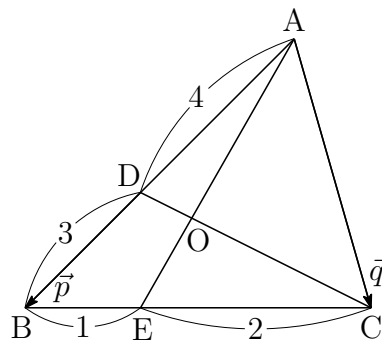
よって, $x = \frac{1}{3}$ のとき, 最小値 $-\frac{2}{27}$ をとる. ■

- 7 (1) 点 E は辺 BC を 1 : 2 に内分するから

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{1}{3}\vec{q}$$

点 O は線分 AE 上にあるから (k は定数)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} &= k\overrightarrow{AE} = k\left(\frac{2}{3}\vec{p} + \frac{1}{3}\vec{q}\right) \\ &= k\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{7}{6}k\overrightarrow{AD} + \frac{k}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$



点 O は、直線 CD 上にあるから $\frac{7}{6}k + \frac{k}{3} = 1$ これを解いて $k = \frac{2}{3}$

$$\text{よって } \overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{p} + \frac{1}{3}\vec{q}\right) = \frac{4}{9}\vec{p} + \frac{2}{9}\vec{q}$$

別解 $\triangle ABE$ と直線 CD についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{EO}{OA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{EO}{OA} = 1$$

$$\text{したがって } \frac{EO}{OA} = \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad k = \frac{2}{3}$$

- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BO} &= \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} = \left(\frac{4}{9}\vec{p} + \frac{2}{9}\vec{q}\right) - \vec{p} = -\frac{5}{9}\vec{p} + \frac{2}{9}\vec{q} \\ \overrightarrow{CO} &= \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AC} = \left(\frac{4}{9}\vec{p} + \frac{2}{9}\vec{q}\right) - \vec{q} = \frac{4}{9}\vec{p} - \frac{7}{9}\vec{q}\end{aligned}$$

点 O は $\triangle ABC$ の外心であるから、 $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{CO}|$ より

$$\left|\frac{4}{9}\vec{p} + \frac{2}{9}\vec{q}\right| = \left|-\frac{5}{9}\vec{p} + \frac{2}{9}\vec{q}\right| = \left|\frac{4}{9}\vec{p} - \frac{7}{9}\vec{q}\right|$$

$$|4\vec{p} + 2\vec{q}|^2 = |-5\vec{p} + 2\vec{q}|^2 = |4\vec{p} - 7\vec{q}|^2 \text{ より}$$

$$16|\vec{p}|^2 + 16\vec{p} \cdot \vec{q} + 4|\vec{q}|^2 = 25|\vec{p}|^2 - 20\vec{p} \cdot \vec{q} + 4|\vec{q}|^2 = 16|\vec{p}|^2 - 56\vec{p} \cdot \vec{q} + 49|\vec{q}|^2$$

$$\text{ゆえに } |\vec{q}|^2 = \frac{2}{5}|\vec{p}|^2, \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{1}{4}|\vec{p}|^2, \quad |\vec{q} - \vec{p}|^2 = |\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 = \frac{9}{10}|\vec{p}|^2$$

$$\text{よって } AB^2 : BC^2 : CA^2 = |\vec{p}|^2 : |\vec{q} - \vec{p}|^2 : |\vec{q}|^2 = 1 : \frac{9}{10} : \frac{2}{5} = 10 : 9 : 4$$

■

- 8 (1) $X \leq k$ となるのは、3枚のカードの番号がすべて k 以下、または、1枚のカード番号が k より大きく残り2枚がともに k 以下となる場合であるから

$$P(X \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^3 + {}_3C_1 \left(\frac{k}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{k}{n}\right) = \frac{3nk^2 - 2k^3}{n^3} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

- (2) $k \geq 2$ のとき、(1) の結果から

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X \leq k) - P(X \leq k-1) \\ &= \frac{3nk^2 - 2k^3}{n^3} - \frac{3n(k-1)^2 - 2(k-1)^3}{n^3} \end{aligned}$$

上式は、(1) の結果に注意すると、 $k = 1$ のときも成立するから

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{3n(2k-1) - 2(3k^2 - 3k + 1)}{n^3} \\ &= \frac{-6k^2 + 6(n+1)k - 3n - 2}{n^3} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から

$$P(X = k) = -\frac{6}{n^3} \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{3n^2 - 1}{2n^3}$$

よって n が奇数のとき、 $k = \frac{n+1}{2}$ で最大、

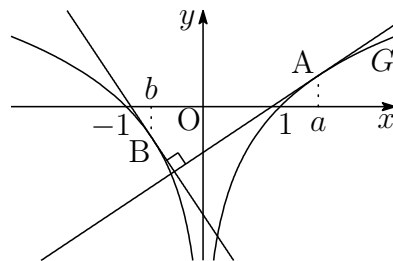
n が偶数のとき、 $k = \frac{n}{2}, \frac{n+2}{2}$ で最大



- 9 (1) $G: y = |\log x|$ より $y' = \frac{1}{x}$

G 上の 2 点 A, B における x 座標がそれぞれ a, b で, A における接線と B における接線が直交するから

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = -1 \quad \text{よって} \quad ab = -1$$



- (2) $A(a, \log a), B(b, \log b)$ の中点は, (1) の結果から

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{\log a + \log b}{2} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right), 0 \right)$$

$\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) = k \cdots (*)$ とおくと, 2 次方程式 $a^2 - 2ka - 1 = 0$ の判別式は

$$D/4 = k^2 + 1 > 0$$

したがって, 任意の実数 k に対して, $(*)$ を満たす実数 a が存在する.

よって, AB の中点の存在範囲は, 直線 $y = 0$, すなわち, x 軸である.

- (3) 直線 AB が x 軸上の点 $(1, 0)$ を通るから, (2) の結果より, この点は線分 AB の中点で

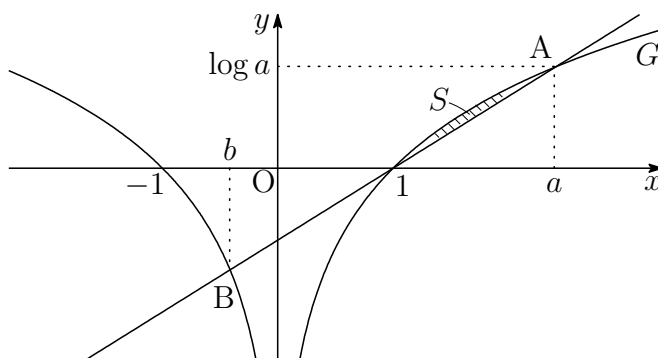
$$\frac{a+b}{2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad b = 2 - a$$

これを (1) の結果に代入して整理すると $a^2 - 2a - 1 = 0$

$a > 0$ に注意して解くと $a = 1 + \sqrt{2}$

求める図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^a \log x \, dx - \frac{1}{2}(a-1) \log a = \left[x(\log x - 1) \right]_1^a - \frac{1}{2}(a-1) \log a \\ &= \frac{1}{2}(a+1) \log a + 1 - a = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2}) \log(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} \end{aligned}$$



- 10** (1) A は原点を中心に $\frac{\pi}{6}$ だけ回転する 1 次変換を表す行列, B は x 軸に関する対称移動を表す行列であるから

$$m = 12, \quad n = 2$$

- (2) P の偏角を θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とすると, Q は B により, -2θ だけ回転したものであるから, Q の偏角は $-\theta$ となる. P が A^2, A^k によって移動した点 R, S の偏角はそれぞれ $\theta + \frac{\pi}{3}, \theta + \frac{k}{6}\pi$ である. $\triangle QRS$ が正三角形であるから

$$\frac{k}{6}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \quad 1 \leq k \leq 12 \text{ より } k = 6, 10$$

- (i) $k = 6$ のとき, Q と S の偏角により, 整数 l を用いて

$$-\theta - (\theta + \pi) = \frac{2}{3}\pi + 2l\pi \quad \text{ゆえに} \quad \theta = -\left(l + \frac{5}{6}\right)\pi$$

$$\text{したがって } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi$$

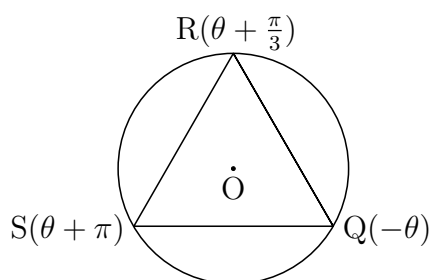
$$\text{よって, } P \text{ の座標は } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

- (ii) $k = 10$ のとき, Q と S の偏角により, 整数 l' を用いて

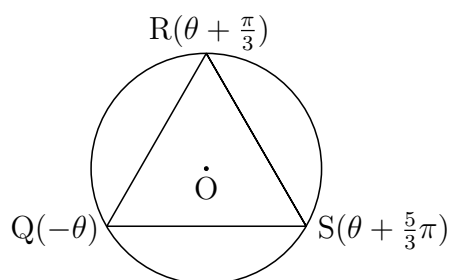
$$\left(\theta + \frac{5}{3}\pi\right) - (-\theta) = \frac{2}{3}\pi + 2l'\pi \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \left(l' - \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\text{したがって } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{よって, } P \text{ の座標は } (0, 1), (0, -1)$$



$k = 6$ のとき



$k = 10$ のとき



11 (1) 一般性を失うことなく, $a \leq x \leq y \leq b$ とする.

$$\frac{x+y}{2} = \frac{a+b}{2} = c, \quad c-a = b-c = d, \quad c-x = y-c = e \text{ とおくと}$$

$$a = c-d, \quad b = c+d, \quad x = c-e, \quad y = c+e, \quad 0 \leq e \leq d$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad xy - ab &= (c-e)(c+e) - (c-d)(c+d) \\ &= d^2 - e^2 = (d+e)(d-e) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad xy \geq ab$$

別解 $a \leq x \leq b$ より, $(x-a)(x-b) \leq 0$ であるから

$$x^2 - (a+b)x + ab \leq 0$$

$a+b = x+y$ を代入すると

$$x^2 - (x+y)x + ab \leq 0 \quad \text{よって} \quad xy \geq ab$$

補足 等号が成立するとき $x^2 - (a+b)x + ab = 0$

ゆえに $x = a$ または $x = b$ すなわち $(x, y) = (a, b), (b, a)$

(2) 一般性を失うことなく, $a \leq x \leq y \leq z \leq b$ とする.

$$\frac{x+y+z}{3} = \frac{a+2b}{3} = m, \quad \frac{b-a}{3} = r \text{ とおくと, } x \leq m \leq z \text{ であるから}$$

$$a = m-2r, \quad b = m+r, \quad (m > 0, r > 0)$$

$$x = m-s \quad (0 \leq s \leq 2r), \quad z = m+t \quad (0 \leq t \leq r)$$

さらに, $y = m+s-t$ であるから, $x \leq y \leq z$ より

$$m-s \leq m+s-t \leq m+t \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq \frac{t}{2} \leq s \leq 2t \leq 2r \quad (*)$$

したがって

$$\begin{aligned} xyz - ab^2 &= (m-s)(m+s-t)(m+t) - (m-2r)(m+r)^2 \\ &= m(3r^2 - s^2 + st - t^2) + 2r^3 - s^2t + st^2 \end{aligned}$$

s を固定し (*) に注意すると

$$f(t) = 3r^2 - s^2 + st - t^2, \quad g(t) = 2r^3 - s^2t + st^2 \quad \left(\frac{s}{2} \leq t \leq r\right)$$

とおくと

$$xyz - ab^2 = mf(t) + g(t) \quad (**)$$

このとき

$$\begin{aligned} f(t) &= -\left(t - \frac{s}{2}\right)^2 + 3r^2 - \frac{3}{4}s^2 \\ g(t) &= s\left(t - \frac{s}{2}\right)^2 + 2r^3 - \frac{1}{4}s^3 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} f(t) &\geq f(r) = 2r^2 + rs - s^2 = (r+s)(2r-s) \geq 0 \\ g(t) &\geq g\left(\frac{s}{2}\right) = 2r^3 - \frac{1}{4}s^3 = 2\left\{r^3 - \left(\frac{s}{2}\right)^3\right\} \geq 0 \end{aligned}$$

上の 2 式および (**) により $xyz \geq ab^2$

補足 等号が成立するとき, $f(t) = g(t) = 0$ であるから $s = 2r$

このとき $\frac{s}{2} \leq t \leq r$ より $t = r$ すなわち $x = a, y = z = b$

別解 $x + y + z = a + 2b$ より, $z = a + 2b - x - y$ であるから

$$\begin{aligned} xyz - ab^2 &= xy(a + 2b - x - y) - ab^2 \\ &= -xy(y + x - a - b) - ab^2 \end{aligned}$$

x を固定して, $h(y) = -xy(y + x - a - b) - ab^2$ とおく.

$$a \leq x \leq b, \quad a \leq y \leq b, \quad a \leq z \leq b, \quad x + y + z = a + 2b$$

であるから, $b \leq 2b - x$ に注意して $a + b - x \leq y \leq b$

$h(y)$ の y^2 の係数 $(-x)$ が負で

$$h(a + b - x) = -bx(x - a - b), \quad h(b) = -bx(x - a - b)$$

したがって $h(y) \geq -bx(x - a - b) - ab^2 = -b(x - a)(x - b) \geq 0$

よって $xyz \geq ab^2$ ■

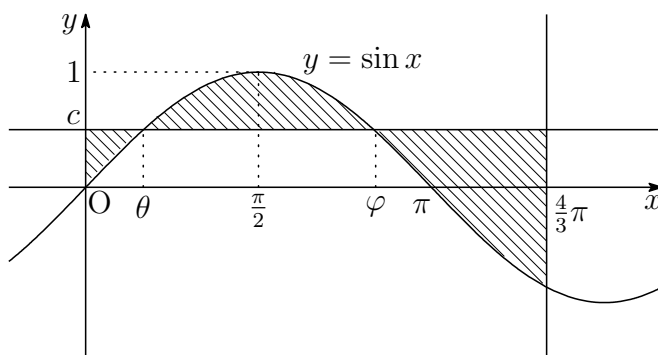
- 12** (1) S は $c \geq 1$ において単調に増加するから, $0 \leq c < 1$ の場合について調べればよい. A の面積 S は $0 \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$ における曲線 $y = \sin x$ のグラフと直線 $y = c$ ($0 \leq c < 1$) で囲まれた部分の面積に等しい. $c = \sin \theta = \sin \varphi$ とおくと ($0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} < \varphi$, $\theta + \varphi = \pi$)

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^\theta (c - \sin x) dx + \int_\theta^\varphi (\sin x - c) dx + \int_\varphi^{\frac{4\pi}{3}} (c - \sin x) dx \\
 &= \left[cx + \cos x \right]_0^\theta - \left[\cos x + cx \right]_\theta^\varphi + \left[cx + \cos x \right]_\varphi^{\frac{4\pi}{3}} \\
 &= c \left(2\theta - 2\varphi + \frac{4\pi}{3} \right) + 2(\cos \theta - \cos \varphi) - \frac{3}{2} \\
 &= \left(4\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \sin \theta + 4 \cos \theta - \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$S = f(\theta) \text{ とおくと } f'(\theta) = \left(4\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \theta$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

S は, $c = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ のとき, 最小値 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{3}{2}$ をとる.



(2) 求める立体の体積 V は

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{4\pi}{3}} |\sin x - c|^2 dx \\
 &= \int_0^{\frac{4\pi}{3}} (\sin^2 x - 2c \sin x + c^2) dx \\
 &= \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} - 2c \sin x + c^2 \right) dx \\
 &= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + 2c \cos x + c^2 x \right]_0^{\frac{4\pi}{3}} \\
 &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} - 3c + \frac{4\pi}{3} c^2 \\
 &= \frac{4\pi}{3} \left(c - \frac{9}{8\pi} \right)^2 - \frac{27}{16\pi} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}
 \end{aligned}$$

このとき, $c = \frac{9}{8\pi}$ は, $0 < \frac{9}{8\pi} < 1$ を満たす.

よって, V は $c = \frac{9}{8\pi}$ のとき, 最小値 $\frac{2}{3}\pi^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi - \frac{27}{16}$ をとる. ■