

平成 19 年度 千葉大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (算数科選修) [1] [2] [3] [4] (90 分) 数 I・A
- 教育学部 (理科教育・技術科教育) [2] [3] [4] [5] (90 分) 数 I・A
- 文 (行動科学)・法経学部 [4] [5] [6] [7] (90 分) 数 I・II・A・B
- 園芸学部・教育 (情報教育分野) [3] [4] [6] [7] (90 分) 数 I・II・A・B
- 教育 (数学科教育分野) [1] [3] [4] [6] [7] [8] (150 分) 数 I・II・A・B
- 理学部 (生物学科, 地球科学科), 工学部 (建築学科, 都市環境システム学科, デザイン学科) [3] [4] [6] [7] [9] (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (物理学科, 化学科), 医学部, 薬学部, 工学部 (電子機械工学科, メディカルシステム工学科, 情報画像工学科, 共生応用化学科)
[4] [7] [8] [9] [10] (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (数学・情報数理) [4] [7] [8] [9] [10] [11] (180 分)
数 I・II・III・A・B・C

[1] a を正の実数とする. 2 次関数 $f(x) = ax^2 - 2(a+1)x + 1$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) 関数 $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標を求めよ.
- (2) $0 \leq x \leq 2$ の範囲で $y = f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.

[2] n を奇数とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $n^2 - 1$ は 8 の倍数であることを証明せよ.
- (2) $n^5 - n$ は 3 の倍数であることを証明せよ.

[3] C_1 を半径 1 の円とし, C_2 を C_1 に外接している半径 2 の円とする. C を円 C_1 と円 C_2 の両方に外接している半径 r の円とする. 円 C の中心を A, 円 C_1 の中心を B, C_1 と C_2 の接点を O とし, $\angle AOB$ を θ とする.

- (1) $r = 3$ のとき $\cos \theta$ の値を求めよ.
- (2) 線分 AO の長さを r を用いて表せ.

- 4 1 から 7 までの番号が書かれた 7 枚のカードがある．この中から 4 枚のカードを同時に取り出す．取り出されたカードに書かれた 4 個の数の和から，取り出されなかった 3 枚のカードに書かれた 3 個の数の和を引いた値を X とする．

- (1) $X = -8$ となる確率を求めよ．
- (2) X が負となる確率を求めよ．
- (3) X の期待値を求めよ．

- 5 a を実数とする． x についての方程式 $|x^2 + ax + 2a| = a + 1$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつような a の値の範囲を求めよ．

- 6 平面上で $AB = 3$ となる 2 点 A, B をとる．点 A を中心とする半径 1 の円を S とし，点 B を中心とする半径 2 の円を T とする．2 点 C, D は円 S 上を動き，2 点 E, F は円 T 上を動く．ただし，線分 CD は点 A を通り，線分 EF は点 B を通る．このとき内積 $\vec{CE} \cdot \vec{DF}$ の最大値と最小値を求めよ．

- 7 n を奇数とする．次の問いに答えよ．

- (1) $n^2 - 1$ は 8 の倍数であることを証明せよ．
- (2) $n^5 - n$ は 3 の倍数であることを証明せよ．
- (3) $n^5 - n$ は 120 の倍数であることを証明せよ．

- 8 x の関数

$$f(x) = \int_{x-2}^{x+2} |y(y-5)| dy$$

の $2 \leq x$ における最小値を求めよ．

- 9 e を自然対数の底とし， $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\log_e |x| + \frac{3}{4}$ とする．

- (1) 曲線 $y = f(x)$ の 2 接線で，互いに垂直であるものをすべて求めよ．
- (2) 直線 ℓ は曲線 $y = f(x)$ の接線で，原点を通りかつ傾きが正とする． ℓ の方程式は $y = x$ であることを示せ．
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = e, y = x$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

- 10 媒介変数表示 $x = \cos \theta, y = \cos^2 \theta \cdot \tan \frac{\theta}{2}$ (ただし, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) が表す曲線を C とする．

- (1) y を最大にする θ の値を α とするとき， $\cos \alpha$ の値を求めよ．
- (2) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

11 初項 a , 公差 d の等差数列を $\{a_n\}$ とし, 初項 b , 公比 r の等比数列を $\{b_n\}$ とする. ただし $bd \neq 0$, $r \neq 0, 1$ とする. 数列 $\{b_n\}$ の各項は数列 $\{a_n\}$ のどれかの項と一致するものと仮定し, 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = \frac{b_n - a}{d}$ で定める.

(1) c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は 0 以上の整数であることを示せ.

(2) 数列 $\{c_n\}$ は

$$c_{n+1} - rc_n = c_2 - rc_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすことを示せ.

(3) r が有理数であることを示せ.

(4) c_n ($n = 3, 4, 5, \dots$) を c_1, c_2, r を用いて表せ.

(5) r は整数であることを示せ.

解答例

1 (1) $f(x) = ax^2 - 2(a+1)x + 1$

$$y = f(x) \text{ より } y = a \left(x - \frac{a+1}{a} \right)^2 - \frac{a^2 + a + 1}{a}$$

$$\text{よって、頂点の座標は } \left(\frac{a+1}{a}, -\frac{a^2 + a + 1}{a} \right)$$

(2) $a > 0$ より、定義域 $0 \leq x \leq 2$ の中央 1 と頂点の x 座標 $\frac{a+1}{a}$ の大小関係は

$$1 < 1 + \frac{1}{a} = \frac{a+1}{a}$$

よって 最大値 $f(0) = 1$

最小値について

$$0 < \frac{a+1}{a} \leq 2 \text{ すなわち } a \geq 1 \text{ のとき } f\left(\frac{a+1}{a}\right) = -\frac{a^2 + a + 1}{a}$$

$$\frac{a+1}{a} > 2 \text{ すなわち } 0 < a < 1 \text{ のとき } f(2) = -3$$

補足 下に凸の放物線について、定義域の中央が軸より左側にあるとき、定義域の左端で最大値をとり、定義域の中央が軸より右側にあるとき、定義域の右端で最大値をとる。 ■

2 (1) 奇数 n を整数 m を用いて、 $n = 2m + 1$ とおくと

$$n^2 - 1 = (n+1)(n-1) = (2m+2) \cdot 2m = 4m(m+1)$$

$m(m+1)$ は連続する 2 整数の積であるから、偶数である。

よって、 $n^2 - 1$ は 8 の倍数である。

(2) $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n-1)n(n+1)(n^2 + 1)$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 整数の積であるから、3 の倍数である。

よって、 $n^5 - n$ は 3 の倍数である。

補足 $n^2 + 1 = (n+2)(n-2) + 5$ であるから

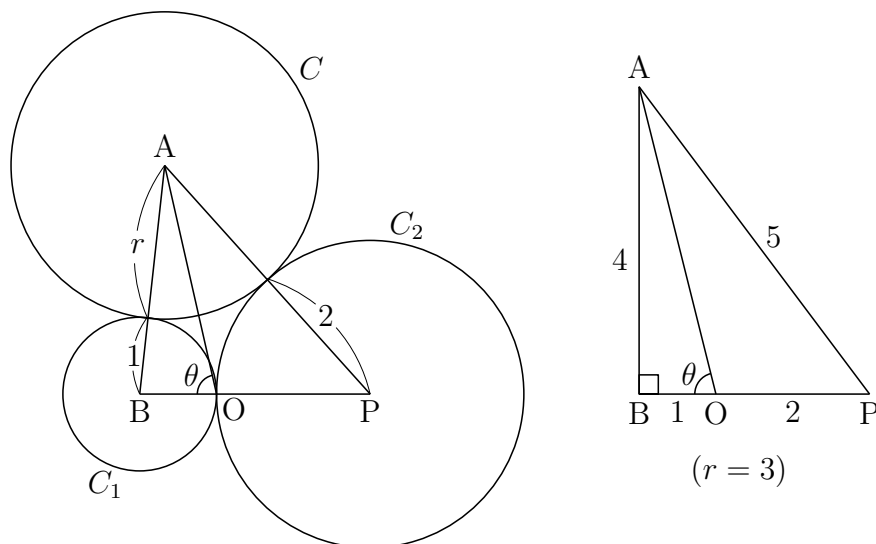
$$\begin{aligned} n^5 - n &= (n-1)n(n+1)\{(n+2)(n-2) + 5\} \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ は $5!$ の倍数、 $5(n-1)n(n+1)$ は $5 \cdot 3!$ の倍数。

よって、 $n^5 - n$ は 30 の倍数である。 ■

- 3** (1) C_2 の中心を P とすると, $r = 3$ のとき, $\triangle ABP$ は, AP を斜辺とする直角三角形であるから, 直角三角形 ABO の斜辺 AO の長さは

$$AO = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \quad \text{よって} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$



- (2) $AO = x$ とし, $\triangle AOB$ および $\triangle AOP$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} (r+1)^2 &= x^2 + 1^2 - 2x \cdot 1 \cos \theta \\ &= x^2 + 1 - 2x \cos \theta \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (r+2)^2 &= x^2 + 2^2 - 2x \cdot 2 \cos(180^\circ - \theta) \\ &= x^2 + 4 + 4x \cos \theta \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

① $\times 2 +$ ② より

$$2(r+1)^2 + (r+2)^2 = 3x^2 + 6 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = \frac{3r^2 + 8r}{3}$$

よって $AO = \sqrt{\frac{3r^2 + 8r}{3}}$



- 4 (1) 取り出された4枚のカードの数の和を A , 取り出されなかった4枚のカードの数の和を B とすると

$$X = A - B, \quad A + B = 28 \quad (*)$$

$$X = -8 \text{ のとき, } A = 10, B = 18$$

取り出されなかった3枚の組は $\{5, 6, 7\}$ の1組であるから, 求める確率は

$$\frac{1}{{}_7C_3} = \frac{1}{35}$$

- (2) (*) から $X = 28 - 2B \quad \dots (**)$

$$X < 0 \text{ のとき, } 28 - 2B < 0 \text{ より } B > 14$$

$B > 14$ となる3枚の組は次の7組である.

$$B = 15 \text{ のとき } 3 \text{ 組 } \{2, 6, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{4, 5, 6\}$$

$$B = 16 \text{ のとき } 2 \text{ 組 } \{3, 6, 7\}, \{4, 5, 7\}$$

$$B = 17 \text{ のとき } 1 \text{ 組 } \{4, 6, 7\}$$

$$B = 18 \text{ のとき } 1 \text{ 組 } \{5, 6, 7\}$$

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{7}{{}_7C_3} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$$

- (3) $B = 6$ のとき 1 組 $\{1, 2, 3\}$

$$B = 7 \text{ のとき } 1 \text{ 組 } \{1, 2, 4\}$$

$$B = 8 \text{ のとき } 2 \text{ 組 } \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}$$

$$B = 9 \text{ のとき } 3 \text{ 組 } \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}$$

$$B = 10 \text{ のとき } 4 \text{ 組 } \{1, 2, 7\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}$$

$$B = 11 \text{ のとき } 4 \text{ 組 } \{1, 3, 7\}, \{1, 4, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 5\}$$

$$B = 12 \text{ のとき } 5 \text{ 組 } \{1, 4, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4, 5\}$$

$$B = 13 \text{ のとき } 4 \text{ 組 } \{1, 5, 7\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 6\}$$

$$B = 14 \text{ のとき } 4 \text{ 組 } \{1, 6, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}$$

$$\begin{aligned} E(B) &= 6 \cdot \frac{1}{35} + 7 \cdot \frac{1}{35} + 8 \cdot \frac{2}{35} + 9 \cdot \frac{3}{35} + 10 \cdot \frac{4}{35} + 11 \cdot \frac{4}{35} + 12 \cdot \frac{5}{35} \\ &\quad + 13 \cdot \frac{4}{35} + 14 \cdot \frac{4}{35} + 15 \cdot \frac{3}{35} + 16 \cdot \frac{2}{35} + 17 \cdot \frac{1}{35} + 18 \cdot \frac{1}{35} = 12 \end{aligned}$$

$$(**) \text{ より } E(X) = 28 - 2E(B) = 28 - 2 \cdot 12 = 4$$

別解 番号1のカードが取り出されない確率は $\frac{{}_6C_2}{{}_7C_3} = \frac{3}{7}$

$$\text{他の番号のカードも同様に } \frac{3}{7} \quad E(B) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \cdot \frac{3}{7} = 12$$



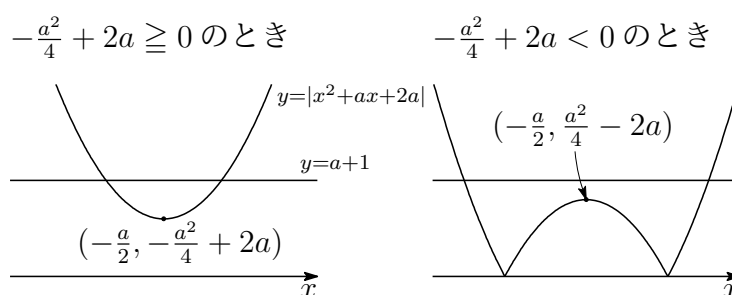
5 $x^2 + ax + 2a = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2a$ より,

(i) $0 \leq -\frac{a^2}{4} + 2a < a + 1$

(ii) $0 < \frac{a^2}{4} - 2a < a + 1$

(iii) $-\frac{a^2}{4} + 2a < 0$ かつ $a + 1 = 0$

のどれかを満たせばよい.



(i) $-\frac{a^2}{4} + 2a \geq 0, -\frac{a^2}{4} + 2a < a + 1$ のとき

$$a(a - 8) \leq 0, (a - 2)^2 > 0$$

したがって $0 \leq a \leq 8$ ($a \neq 2$)

(ii) $\frac{a^2}{4} - 2a > 0, \frac{a^2}{4} - 2a < a + 1$ のとき

$$a(a - 8) > 0, a^2 - 12a - 4 < 0$$

したがって $6 - 2\sqrt{10} < a < 0, 8 < a < 6 + 2\sqrt{10}$

(iii) $-\frac{a^2}{4} + 2a < 0$ かつ $a + 1 = 0$ すなわち $a = -1$

(i)~(iii) より, 求める a の値の範囲は

$$a = -1, 6 - 2\sqrt{10} < a < 6 + 2\sqrt{10} \quad (a \neq 2)$$

■

6 S と T の接点を O とし, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{DE} = 2\vec{e}$ とすると

$$\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{OD} = \vec{a} - \vec{c}, \quad \overrightarrow{OE} = -2\vec{a} + 2\vec{e}, \quad \overrightarrow{OF} = -2\vec{a} - 2\vec{e}$$

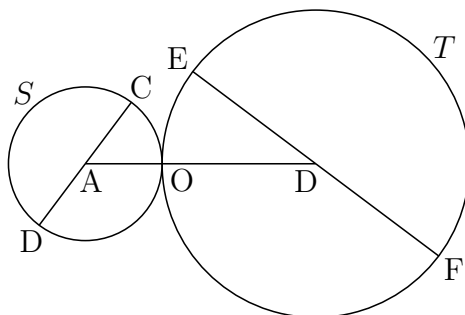
であるから ($\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$ は単位ベクトル)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{DF} &= (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD}) \\ &= \{(-2\vec{a} + 2\vec{e}) - (\vec{a} + \vec{c})\} \cdot \{(-2\vec{a} - 2\vec{e}) - (\vec{a} - \vec{c})\} \\ &= \{-3\vec{a} - (\vec{c} - 2\vec{e})\} \cdot \{-3\vec{a} + (\vec{c} - 2\vec{e})\} \\ &= 9|\vec{a}|^2 - |\vec{c} - 2\vec{e}|^2 = 9|\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2 + 4\vec{c} \cdot \vec{e} - 4|\vec{e}|^2 \\ &= 4 + 4\vec{c} \cdot \vec{e} \end{aligned}$$

$-|\vec{c}||\vec{e}| \leq \vec{c} \cdot \vec{e} \leq |\vec{c}||\vec{e}|$ より, $-1 \leq \vec{c} \cdot \vec{e} \leq 1$ であるから

$$0 \leq \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{DF} \leq 8$$

よって 最大値 8, 最小値 0



- 7 (1) 2 (1) と同じ
 (2) 2 (2) と同じ
 (3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}
 n^5 - n &= n(n+1)(n-1)(n^2+1) \\
 &= n(n+1)(n-1)\{(n^2-4)+5\} \\
 &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1)
 \end{aligned}$$

連続する 5 整数の積

$$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$

は, $5!$, すなわち, 120 の倍数である. また,

$$5(n-1)n(n+1)$$

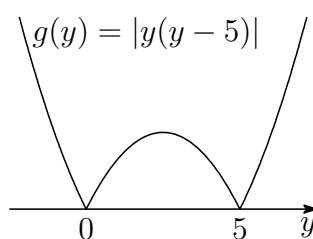
は 5 の倍数, 連続する 3 整数を因数にもつから 3 の倍数, 同時に (1) の結果から $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$ は 8 の倍数であるから, $5 \cdot 3 \cdot 8$, すなわち, 120 の倍数である. よって, $n^5 - n$ は 120 の倍数である. ■

8 $f(x) = \int_{x-2}^{x+2} |y(y-5)| dy$ より ($2 \leq x$)

$$2 \leq x \leq 3 \text{ のとき} \quad f(x) = - \int_{x-2}^{x+2} y(y-5) dy$$

$$3 \leq x \leq 7 \text{ のとき} \quad f(x) = - \int_{x-2}^5 y(y-5) dy + \int_5^{x+2} y(y-5) dy$$

$$7 \leq x \text{ のとき} \quad f(x) = \int_{x-2}^{x+2} y(y-5) dy$$



(i) $2 < x < 3$ のとき

$$f'(x) = -(x+2)(x-3) + (x-2)(x-7) = -8x + 20$$

(ii) $3 < x < 7$ のとき

$$f'(x) = (x-2)(x-7) + (x+2)(x-3) = 2(x-1)(x-4)$$

(iii) $7 < x$ のとき

$$f'(x) = (x+2)(x-3) - (x-2)(x-7) = 8x - 20$$

x	2	...	$\frac{5}{2}$	...	3	...	4	...	7	...
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+		+
$f(x)$		↗	極大	↘		↘	極小	↗		↗

$$f(2) = - \int_0^4 y(y-5) dy = - \left[\frac{y^3}{3} - \frac{5}{2}y^2 \right]_0^4 = \frac{56}{3},$$

$$\begin{aligned} f(4) &= - \int_2^5 y(y-5) dy + \int_5^6 y(y-5) dy \\ &= - \left[\frac{y^3}{3} - \frac{5}{2}y^2 \right]_2^5 + \left[\frac{y^3}{3} - \frac{5}{2}y^2 \right]_5^6 = \frac{49}{3} \end{aligned}$$

よって、求める最小値は $f(4) = \frac{49}{3}$ ■

9 (1) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\log_e|x| + \frac{3}{4}$ より $f'(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$

$x > 0$ のとき $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{2x} + 1 \geq 1$ (等号は $x = 1$ のとき)

$x < 0$ のとき $f'(x) = \frac{(x+1)^2}{2x} - 1 \leq -1$ (等号は $x = -1$ のとき)

2接線の接点の x 座標を x_1, x_2 とすると ($x_1 < 0 < x_2$), 条件から

$$f'(x_1)f'(x_2) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad f'(x_1) = -1, \quad f'(x_2) = 1$$

上の条件に注意して $x_1 = -1, x_2 = 1$

点 $(-1, 1)$ における接線は $y - 1 = -1(x + 1)$ すなわち $y = -x$

点 $(1, 1)$ における接線は $y - 1 = 1(x - 1)$ すなわち $y = x$

(2) 曲線 $y = f(x)$ と接線 ℓ の接点を $(t, f(t))$ とすると, 接線 ℓ の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y = f'(t)x + f(t) - tf'(t)$$

ℓ の傾きが正であるから, (1) の結果から $t > 0$

$$g(t) = f(t) - tf'(t) \quad \text{とおくと} \quad (t > 0) \quad g'(t) = -tf''(t)$$

$$\text{したがって} \quad g'(t) = -t \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2} \right) = -\frac{1}{2t}(t+1)(t-1)$$

t	(0)	...	1	...
$g'(t)$		+	0	-
$g(t)$		$\nearrow$	0	$\searrow$

ℓ が原点を通るから, $g(t) = 0$ より $t = 1$

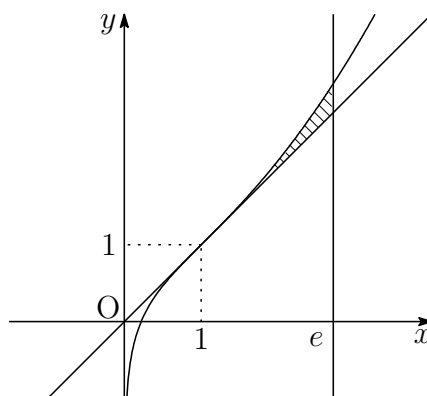
(1) の結果に注意すると, ℓ は点 $(1, 1)$ を通り, 傾きの 1 の直線であるから

$$y - 1 = 1(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = x$$

(3) $x > 1$ において $f''(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2x^2}(x+1)(x-1) > 0$

$x > 1$ において, $y = f(x)$ は下に凸であるから, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^e \{f(x) - x\} dx \\
 &= \int_1^e \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\log x + \frac{3}{4} - x \right) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{12} + \frac{1}{2}x(\log x - 1) + \frac{3}{4}x - \frac{x^2}{2} \right]_1^e \\
 &= \frac{e^3 - 6e^2 + 9e + 2}{12}
 \end{aligned}$$



■

- 10** (1) $y = \cos^2 \theta \tan \frac{\theta}{2}$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) について, $t = \tan \frac{\theta}{2}$ とおくと, $0 \leq t \leq 1$,
 $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ であるから

$$y = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \cdot t + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2$$

$$= -\frac{(1-t^2)(t^4+8t^2-1)}{(1+t^2)^3}$$

$0 \leq t \leq 1$ に注意して, $t^4 + 8t^2 - 1 = 0$ を解くと

$$t^2 = \sqrt{17} - 4 \quad \text{ゆえに} \quad t = \sqrt{\sqrt{17} - 4}$$

t	0	...	$\sqrt{\sqrt{17}-4}$	...	1
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	
y	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

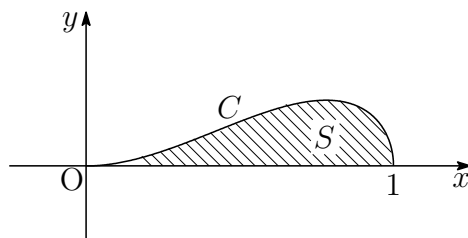
y が最大となるときの α は $t^2 = \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \sqrt{17} - 4$ であるから

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - (\sqrt{17} - 4)}{1 + (\sqrt{17} - 4)} = \frac{5 - \sqrt{17}}{\sqrt{17} - 3} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4}$$

- (2) $x = \cos \theta$, $y = \cos^2 \theta \tan \frac{\theta}{2}$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \hline \theta & \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \end{array}$$

求める面積を S とすると



$$S = \int_0^1 y \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \theta \tan \frac{\theta}{2} (-\sin \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta (1 - \cos \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ \cos^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta \} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} - \cos \theta + \sin^2 \theta \cos \theta \right) d\theta$$

$$= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta - \sin \theta + \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

別解 $x = \cos \theta$, $y = \cos^2 \theta \tan \frac{\theta}{2}$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) より

$$y = x^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$x^2 = x(1+x) - (1+x) + 1$ であるから

$$\begin{aligned} y &= \{x(1+x) - (1+x) + 1\} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx &= \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}, \\ \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ について, $x = \sin u$ とおくと

$$\frac{dx}{du} = \cos u = \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{したがって} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin u) du = \left[u + \cos u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

よって, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

■

- 11** (1) b_n が a_m に等しいとすると ($d \neq 0$)

$$b_n = a + (m-1)d \quad \text{ゆえに} \quad c_n = \frac{b_n - a}{d} = m-1$$

よって, c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は 0 以上の整数である.

- (2) $b_{n+1} = rb_n$, $b_1 = b$, $b_2 = rb$ であることに注意して

$$\begin{aligned} c_{n+1} - rc_n &= \frac{b_{n+1} - a}{d} - r \cdot \frac{b_n - a}{d} \\ &= \frac{b_{n+1} - rb_n + (r-1)a}{d} = \frac{(r-1)a}{d}, \\ c_2 - rc_1 &= \frac{b_2 - a}{d} - r \cdot \frac{b_1 - a}{d} \\ &= \frac{rb - a}{d} - r \cdot \frac{b - a}{d} = \frac{(r-1)a}{d} \end{aligned}$$

上の 2 式から $c_{n+1} - rc_n = c_2 - rc_1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

- (3) (2) の結果に $n = 2$ を代入すると

$$c_3 - rc_2 = c_2 - rc_1 \quad \text{ゆえに} \quad c_3 - c_2 = r(c_2 - c_1) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{また} \quad c_2 - c_1 &= \frac{b_2 - a}{d} - \frac{b_1 - a}{d} \\ &= \frac{rb - a}{d} - \frac{b - a}{d} = \frac{(r-1)b}{d} \neq 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad r = \frac{c_3 - c_2}{c_2 - c_1}$$

c_1, c_2, c_3 は整数であるから, r は有理数である.

- (4) $c_2 - rc_1 = (1-r)A \dots \textcircled{3}$ とおくと, (2) の結果から

$$c_{n+1} - rc_n = (1-r)A \quad \text{ゆえに} \quad c_{n+1} - A = r(c_n - A) \quad \dots (*)$$

(*) から, $\{c_n - A\}$ は, 初項 $c_1 - A$, 公比 r の等比数列であるから

$$c_n - A = (c_1 - A)r^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad c_n = (c_1 - A)r^{n-1} + A$$

$$\textcircled{3} \text{ より, } A = \frac{c_2 - rc_1}{1-r}, \quad c_1 - A = \frac{c_1 - c_2}{1-r} \text{ であるから}$$

$$c_n = \frac{(c_1 - c_2)r^{n-1} + c_2 - rc_1}{1-r}$$

(5) (4) の結果から $(1-r)c_n = (c_1 - c_2)r^{n-1} + c_2 - rc_1 \quad \dots (**)$

(3) の結果から, r は有理数であるから

$$r = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{ は互いに素な整数, } p \geq 1)$$

とにおいて, $(**)$ に代入すると

$$\left(1 - \frac{q}{p}\right) c_n = (c_1 - c_2) \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} + c_2 - \frac{qc_1}{p}$$

$$\text{したがって} \quad (p-q)c_n - pc_2 + qc_1 = \frac{(c_1 - c_2)q^{n-1}}{p^{n-2}}$$

上式の左辺が整数であるから, 右辺の $c_1 - c_2$ が十分大きな整数 n に対しても p^{n-2} の倍数であるためには, $p = 1$ である. よって, r は整数である.

