

平成 18 年度 千葉大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (自然教育・技術教育・情報教育系) [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [10](#) [11](#) [12](#) (180 分)
数 I・II・A・B
- 文 (行動科学)・法経学部 [1](#) [3](#) [4](#) [5](#) (90 分) 数 I・II・A・B
- 園芸学部 [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) (90 分) 数 I・II・A・B
- 理学部 (生物学科, 地球科学科), 工学部 (建築学科, 都市環境システム学科, デザイン学科) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (物理学科, 化学科), 医学部, 薬学部, 工学部 (電子機械工学科, メディカルシステム工学科, 情報画像工学科, 共生応用化学科) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (数学・情報数理) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#) (180 分) 数 I・II・III・A・B・C

[1](#) $\triangle ABC$ において, $AB = 5$, $BC = 5 \sin A$, $CA = 3$ であるとする.

- (1) 辺 BC の長さを求めよ.
- (2) $\triangle ABC$ の内接円の半径を求めよ.

[2](#) $\triangle ABC$ において, $AB = 2$, $AC = 3$, $A = 60^\circ$ のとき, 辺 AC 上に $AD = 1$ となる点 D をとる. さらに E を辺 BC 上の点とする.

- (1) 辺 BC の長さを求めよ.
- (2) 線分 DE が $\triangle ABC$ の面積を二等分するとき, 線分 BE の長さを求めよ.
- (3) $\triangle ABE$ と $\triangle DEC$ の面積の積 T を最大にする線分 BE の長さ, そのときの T の値を求めよ.

[3](#) 実数 a に対し, 2 次関数 $f(x) = x^2 - ax - a^2 + 5a$ を考える.

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解を持つような a の範囲を求めよ.
- (2) 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフが 2 点 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ を通り, $1 \leq \alpha < \beta \leq 3$ となるような a の範囲を求めよ.

- 4 1 から 10 までの整数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある．この中からカードを 3 枚同時に取り出す．取り出された 3 枚のカードに書かれた 3 つの整数のうち，最大のものを除いた残りの 2 つの整数の和を X とする．

(1) $X = 3$ である確率を求めよ．

(2) X の期待値を求めよ．

- 5 関数 $f(x)$ を次のように定義する．

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

また $g(x) = -x^2 + ax + b$ とする． $y = g(x)$ のグラフが $y = f(x)$ のグラフと 2 点で接するとき，次の問いに答えよ．

(1) a, b の値を求めよ．

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ．

- 6 $\triangle OAB$ において， $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおき，

$$|\vec{a}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{3}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

とする．辺 AB 上に点 P_1 をとる．ただし P_1 は A, B とは異なるとする． P_1 から辺 OB に垂線 P_1Q_1 を下ろす．次に， Q_1 から辺 OA に垂線 Q_1R_1 を下ろす．さらに， R_1 から辺 AB に垂線 R_1P_2 を下ろす．以下，同様の操作を続けて，点 P_n, Q_n, R_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を定める． $\overrightarrow{AP_n} = t_n(\vec{b} - \vec{a})$ により t_n ($0 < t_n < 1$) を定める．

(1) $\overrightarrow{BQ_1}$ を t_1 と $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) t_2 を t_1 を用いて表せ．

(3) t_n を t_1 と n を用いて表せ．

(4) $P_1 = P_2$ となるような t_1 の値を求めよ．

(5) $P_1 = P_2$ のとき， $\triangle P_1Q_1R_1$ の面積を求めよ．

- 7 $a \neq 0, b \neq 0$ とする． $f(x) = a \cos^2 x + b \cos x + c$ について， $y = f(x)$ のグラフが x 軸と原点で接しているとする．

(1) $y = f(x)$ のグラフが x 軸と接する点の x 座標をすべて求めよ．

(2) さらに $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ が成り立っているとき， $f(x) = 0$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) をみたす x の値をすべて求めよ．

- 8 a, t を実数とするとき、座標平面において、

$$x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - a) = 0$$

で定義される図形 C を考える.

- (1) すべての t に対して C が円であるような a の範囲を求めよ. ただし、点は円と見なさないものとする.
- (2) $a = 4$ とする. t が $t > 0$ の範囲を動くとき、 C が通過してできる領域を求め、図示せよ.
- (3) $a = 6$ とする. t が $t > 0$ であって、かつ C が円であるような範囲を動くとき、 C が通過してできる領域を求め、図示せよ.

- 9 a を実数とし、数列 $\{a_n\}$ を以下のように定義する.

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

すべての自然数 n に対し $a_n \neq 0$ となるような a の範囲を求めよ.

- 10 放物線 $y = ax^2 - 2x + 1$ について次の問いに答えよ. ただし、 a は 0 でない定数とする.

- (1) 原点から放物線 $y = ax^2 - 2x + 1$ にひいた接線が 2 本あるための a の条件を求めよ. また、これらの接線の方程式を求めよ.
- (2) (1) で得られた 2 接線のなす角が 45° となるような a の値を求めよ.

- 11 一辺の長さが 1 の正三角形 ABC の外接円を K とし、 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおく. また、円 K 上を動く点 P に対し、 $\overrightarrow{AP} = \vec{p}$ とおく. このとき、次の問いに答えよ.

- (1) $\vec{p} = x\vec{b} + y\vec{c}$ とおくとき、 x と y が満たす方程式を求めよ,
- (2) x, y が (1) で求めた方程式を満たしながら動くとき,

$$u = x + \frac{1}{2}y, \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}y$$

で与えられる点 (u, v) の軌跡を求めよ.

12 関数 $f(x)$ はすべての x に対し

$$2f(x) = -6x^2 + 2 \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 x - k^2 + 3$$

を満たすとする．このとき次の問いに答えよ．

- (1) k を用いて, $\int_0^1 f(t) dt$ の値を求めよ．
- (2) $f(1) = 0$ となるような k の値をすべて求めよ．

解答例

- 1 (1) $a = 5 \sin A$, $b = 3$, $c = 5$ を余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ に代入すると

$$25(1 - \cos^2 A) = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos A$$

$$\text{したがって} \quad (5 \cos A - 3)^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos A = \frac{3}{5}, \quad \sin A = \frac{4}{5}$$

$$\text{よって} \quad a = 5 \sin A = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$$

$$(2) \triangle ABC \text{ の面積を } S \text{ とすると} \quad S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 6$$

$$\triangle ABC \text{ の内接円の半径を } r \text{ とすると, } S = \frac{1}{2}r(a + b + c) \text{ であるから}$$

$$6 = \frac{1}{2}r(4 + 3 + 5) \quad \text{これを解いて} \quad r = 1$$

$$\text{補足} \triangle ABC \text{ は } C = 90^\circ \text{ の直角三角形であるから} \quad S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \quad \blacksquare$$

- 2 (1) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 60^\circ$$

$$= 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 7$$

$$\text{よって} \quad BC = \sqrt{7}$$

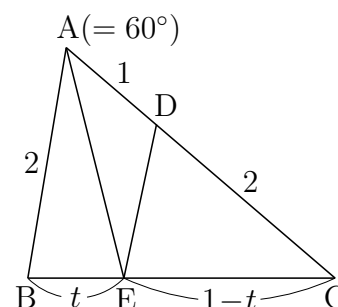
- (2) E は線分 BC を $t : 1 - t$ に内分する点とすると

$$\triangle ABC : \triangle DEC = 1 : \frac{2}{3}(1 - t)$$

線分 DE が $\triangle ABC$ を二等分するとき

$$\frac{2}{3}(1 - t) = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{4}$$

$$\text{よって} \quad BE = \frac{1}{4}BC = \frac{\sqrt{7}}{4}$$



$$(3) \triangle ABC \text{ の面積を } S \text{ とすると} \quad S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle ABE = tS, \quad \triangle DEC = \frac{2}{3}(1 - t)S \text{ より}$$

$$T = tS \cdot \frac{2}{3}(1 - t)S = \frac{2}{3}S^2 t(1 - t) = \frac{9}{2}(t - t^2) = -\frac{9}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

$$\text{よって} \quad t = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad BE = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ のとき} \quad T \text{ は最大値 } \frac{9}{8} \quad \blacksquare$$

3 (1) $f(x) = x^2 - ax - a^2 + 5a = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}a^2 + 5a$

方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき

$$-\frac{5}{4}a^2 + 5a < 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a-4) > 0 \quad \text{よって} \quad a < 0, 4 < a$$

(2) (1) の結果および $1 < \frac{a}{2} < 3$, $f(1) \geq 0$, $f(3) \geq 0$ を満たせばよい.

$$f(1) \geq 0 \text{ より } -a^2 + 4a + 1 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 2 - \sqrt{5} \leq a \leq 2 + \sqrt{5}$$

$$f(3) \geq 0 \text{ より } -a^2 + 2a + 9 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 1 - \sqrt{10} \leq a \leq 1 + \sqrt{10}$$

$$\text{したがって} \quad (*) \quad \begin{cases} a < 0, 4 < a \\ 2 < a < 6 \\ 2 - \sqrt{5} \leq a \leq 2 + \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{10} \leq a \leq 1 + \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\text{ここで} \quad (1 + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{10})^2 = 2(\sqrt{5} - 2) > 0$$

$$\text{これから} \quad \sqrt{10} < 1 + \sqrt{5} \quad \text{ゆえに} \quad 1 + \sqrt{10} < 2 + \sqrt{5}$$

$$\text{よって, } (*) \text{ を満たす } a \text{ の範囲は } 4 < a \leq 1 + \sqrt{10} \quad \blacksquare$$

4 (1) 取り出された 3 枚のカードの中に 1 と 2 のカードを含む確率であるから

$$\frac{{}_8C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

(2) 取り出された 3 枚のカードで最大の整数を Y とすると

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=3}^{10} k \cdot \frac{{}_{k-1}C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{240} \sum_{k=3}^{10} k(k-1)(k-2) \\ &= \frac{1}{960} \sum_{k=3}^{10} \{(k+1)k(k-1)(k-2) - k(k-1)(k-2)(k-3)\} \\ &= \frac{1}{960} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{33}{4} \end{aligned}$$

$$\text{取り出された 3 枚のカードに特定の 1 枚を含む確率は} \quad \frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{3}{10}$$

取り出された 3 枚のカードの総和の期待値は

$$E(X+Y) = 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + \cdots + 10 \cdot \frac{3}{10} = \frac{33}{2}$$

$$\text{よって} \quad E(X) = E(X+Y) - E(Y) = \frac{33}{2} - \frac{33}{4} = \frac{33}{4} \quad \blacksquare$$

5 (1) $g(x) = -x^2 + ax + b = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + b \quad \cdots (*)$

$g(x)$ の最大値は 1 であるから $\frac{a^2}{4} + b = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$

$y = g(x)$ と $y = x$ は接するから, 2 式から y を消去すると

$$-x^2 + ax + b = x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + (1-a)x - b = 0 \quad \cdots (**)$$

このとき, 上の第 2 式の係数について $(1-a)^2 + 4b = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$

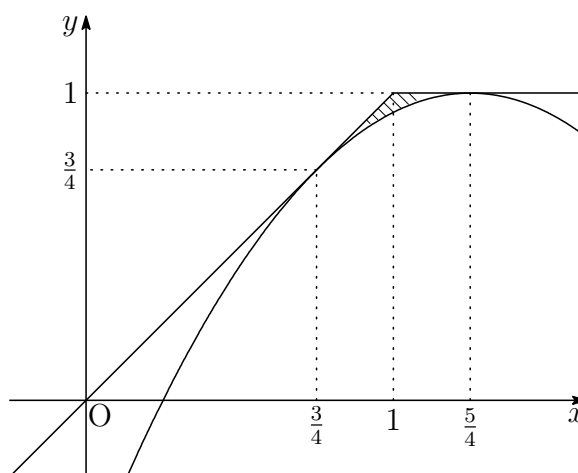
①, ② から b を消去して整理すると

$$2a - 5 = 0 \quad \text{よって} \quad a = \frac{5}{2}, \quad b = -\frac{9}{16}$$

(2) (1) の結果および (*), (**) より, 接点の x 座標は $x = \frac{5}{4}, \frac{3}{4}$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{3}{4}}^1 \left\{ x - \left(-x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{9}{16} \right) \right\} dx + \int_1^{\frac{5}{4}} \left\{ 1 - \left(-x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{9}{16} \right) \right\} dx \\ &= \int_{\frac{3}{4}}^1 \left(x - \frac{3}{4} \right)^2 dx + \int_1^{\frac{5}{4}} \left(x - \frac{5}{4} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(x - \frac{3}{4} \right)^3 \right]_{\frac{3}{4}}^1 + \frac{1}{3} \left[\left(x - \frac{5}{4} \right)^3 \right]_1^{\frac{5}{4}} = \frac{1}{96} \end{aligned}$$



補足 2 つの接点の x 座標および x^2 の係数から ¹ $S = \frac{1}{12} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4} \right)^3 = \frac{1}{96}$ ■

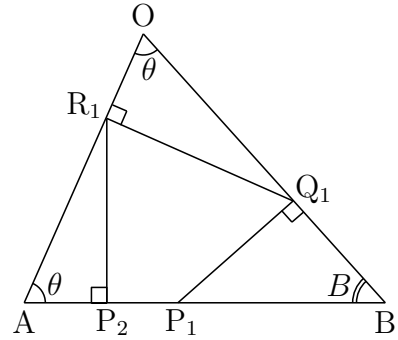
¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun-2009.pdf 4 を参照

- 6 (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$|\vec{AB}|$ の大きさは

$$\begin{aligned} |\vec{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= 3 - 2 \cdot 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$



$|\vec{AB}| = |\vec{OB}| = \sqrt{3}$, $\angle AOB = \angle OAB = \theta$ となり, $B = \angle OBA$ とすると

$$\cos B = \cos(\pi - 2\theta) = -\cos 2\theta = 1 - 2\cos^2 \theta = 1 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

P_1 は AB を $t_1 : 1 - t_1$ に内分する点であるから ($0 < t_1 < 1$)

$$BP_1 = (1 - t_1)|\vec{AB}| = (1 - t_1)|\vec{OB}|,$$

$$BQ_1 = BP_1 \cos B = \frac{2}{3}(1 - t_1)|\vec{OB}|$$

$\vec{BQ_1}$ と $\vec{OB}$ の向きに注意して

$$\vec{BQ_1} = \frac{2}{3}(1 - t_1)(-\vec{OB}) = \frac{2}{3}(t_1 - 1)\vec{b}$$

$$(2) (1) \text{ の結果から } \vec{OQ_1} = \vec{OB} + \vec{BQ_1} = \vec{b} + \frac{2}{3}(t_1 - 1)\vec{b} = \frac{1}{3}(2t_1 + 1)\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} OR_1 &= OQ_1 \cos \theta = \frac{1}{3}(2t_1 + 1)|\vec{b}| \cos \theta \\ &= \frac{1}{3}(2t_1 + 1)\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(2t_1 + 1) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$AR_1 = OA - OR_1 = \sqrt{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}(2t_1 + 1) = \frac{5 - 2t_1}{3\sqrt{2}}$$

$$AP_2 = AR_1 \cos \theta = \frac{5 - 2t_1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{5 - 2t_1}{6\sqrt{3}} = \frac{5 - 2t_1}{18} |\vec{AB}|$$

$$\vec{AP_2} \text{ と } \vec{AB} \text{ の向きに注意して } \vec{AP_2} = \frac{5 - 2t_1}{18} \vec{AB} \quad \text{よって} \quad t_2 = \frac{5 - 2t_1}{18}$$

(3) (2) と同様にして $t_{n+1} = \frac{5-2t_n}{18}$ ゆえに $t_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{9} \left(t_n - \frac{1}{4} \right)$

したがって $t_n - \frac{1}{4} = \left(t_1 - \frac{1}{4} \right) \left(-\frac{1}{9} \right)^{n-1}$

よって $t_n = \frac{1}{4} + \left(t_1 - \frac{1}{4} \right) \left(-\frac{1}{9} \right)^{n-1}$

(4) $P_1 = P_2$ となるとき, $t_1 = t_2$ であるから, (2) の結果より

$$t_1 = \frac{5-2t_1}{18} \quad \text{これを解いて} \quad t_1 = \frac{1}{4}$$

(5) $t_1 = \frac{1}{4}$ のとき ① より $\overrightarrow{OQ_1} = \frac{1}{2}\vec{b}$

② より $OR_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|$

$\overrightarrow{OR_1}$ と $\overrightarrow{OA}$ の向きに注意して

$$\overrightarrow{OR_1} = \frac{1}{4}\vec{a}$$

ゆえに, P_1 は AB を $1:3$ に内分し, Q_1 は OB の中点, R_1 は OA を $1:3$ に内分する.

$\triangle OAB$ の面積を S とすると

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$S = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

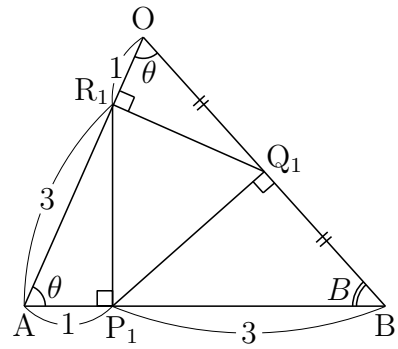
$$\triangle OR_1Q_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} S = \frac{1}{8} S$$

$$\triangle AP_1R_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} S = \frac{3}{16} S$$

$$\triangle BQ_1P_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} S = \frac{3}{8} S$$

よって $\triangle P_1Q_1R_1 = \left(1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{16} - \frac{3}{8} \right) S = \frac{5}{16} S$

$$= \frac{5}{16} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{32}$$



- 7 (1) $f(x) = a \cos^2 x + b \cos x + c$ より $f'(x) = -\sin x(2a \cos x + b)$
 $y = f(x)$ のグラフが x 軸と原点で接しているから, $f(0) = 0$ より

$$a + b + c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$y = f(x)$ のグラフが $x = t$ ($0 < t < 2\pi$) で x 軸に接するとき

$$f(t) = 0, \quad f'(t) = 0 \quad \text{より} \quad (*) \quad \begin{cases} a \cos^2 t + b \cos t + c = 0 \\ \sin t(2a \cos t + b) = 0 \end{cases}$$

$$(*) \text{ の第 2 式から } \sin t = 0 \quad \text{または} \quad \cos t = -\frac{b}{2a}$$

(i) $\sin t = 0$, すなわち, $t = \pi$ のとき, これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$a - b + c = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

このとき, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ から, $b = 0$ となり, 不適.

(ii) $\cos t = -\frac{b}{2a}$ のとき, これを $(*)$ の第 1 式に代入して

$$a \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a} \right) + c = 0 \quad \text{ゆえに} \quad c = \frac{b^2}{4a}$$

$$\text{このとき} \quad f(x) = a \cos^2 x + b \cos x + \frac{b^2}{4a} = a \left(\cos x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

$$f(0) = 0 \quad \text{より} \quad a \left(1 + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{b}{2a} = 1$$

このとき, $\cos t = 1$ となり, $0 < t < 2\pi$ より, これを満たす t はない.

$f(x)$ は周期 2π の周期関数であるから, $f(x) = 0$ を満たす x は

$$x = 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} f(x) dx = \left[a \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) + b \sin x + cx \right]_0^{2\pi} = \pi(a + 2c)$$

$$\text{条件より, } \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0 \text{ であるから } c = -\frac{a}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると } a + b - \frac{a}{2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = -\frac{a}{2} \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より } f(x) = \frac{a}{2}(2 \cos^2 x - \cos x - 1) = \frac{a}{2}(\cos x - 1)(2 \cos x + 1)$$

よって, $f(x) = 0$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) を満たす x は $x = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$ ■

- 8 (1) $C: x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - a) = 0$ より

$$(x - t)^2 + (y - t)^2 = 2t^2 - at + 4$$

$2t^2 - at + 4 = 2\left(t - \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} + 4$ であるから、上式が円である条件は

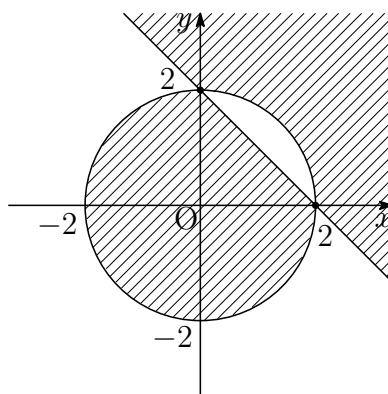
$$-\frac{a^2}{8} + 4 > 0 \quad \text{よって} \quad -4\sqrt{2} < a < 4\sqrt{2}$$

- (2) $a = 4$ のとき、 C は $2t(x + y - 2) = x^2 + y^2 - 4$

$t > 0$ の範囲を動くとき、次を満たせばよい.

$$(x + y - 2)(x^2 + y^2 - 4) > 0 \quad \text{または} \quad (*) \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

(*) は 2 点 $(0, 2)$, $(2, 0)$ を表す. よって、求める領域は下の図の斜線部分で境界線を含まない. ただし、2 点 $(0, 2)$, $(2, 0)$ を含む.



- (3) $a = 6$ のとき、 C は $(x - t)^2 + (y - t)^2 = 2t^2 - 6t + 4$

これが円であるとき $2t^2 - 6t + 4 > 0$

$$2(t - 1)(t - 2) > 0 \quad \text{条件から } t > 0 \text{ より } 0 < t < 1, 2 < t \quad \cdots \textcircled{1}$$

また、 C は $2(x + y - 3)t = x^2 + y^2 - 4$

$F(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 4}{2(x + y - 3)}$ とおくと、 t が $\textcircled{1}$ を動くとき、次を満たせばよい.

$$(**) \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad 0 < F(x, y) < 1, 2 < F(x, y)$$

$(x + y)^2 \leq (1^2 + 1^2)(x^2 + y^2)$ より、(**) を満たす (x, y) はない.

したがって，次の条件を満たせばよい．

$$0 < \frac{x^2 + y^2 - 4}{2(x + y - 3)} < 1, \quad 2 < \frac{x^2 + y^2 - 4}{2(x + y - 3)} \quad (\text{A})$$

(i) $x + y - 3 > 0$ のとき，(A) より

$$\begin{aligned} 0 < x^2 + y^2 - 4 < 2(x + y - 3) \\ \text{または} \quad 4(x + y - 3) < x^2 + y^2 - 4 \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 4 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad (x - 2)^2 + (y - 2)^2 > 0$$

よって $x + y - 3 > 0$, $(x, y) \neq (2, 2)$

(ii) $x + y - 3 < 0$ のとき，(A) より

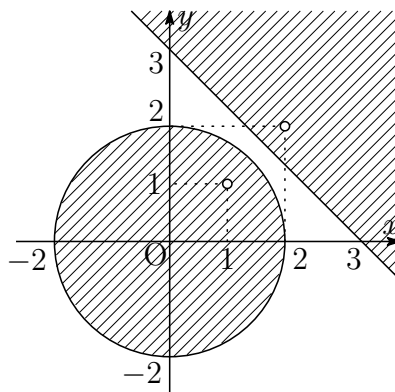
$$\begin{aligned} 0 > x^2 + y^2 - 4 > 2(x + y - 3) \\ \text{または} \quad 4(x + y - 3) > x^2 + y^2 - 4 \end{aligned}$$

これから

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 4 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 > 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad (x - 2)^2 + (y - 2)^2 < 0$$

$$\text{すなわち} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 < 4 \\ (x, y) \neq (1, 1) \end{cases}$$

(i), (ii) から，求める領域は，下の図の 2 点 $(1, 1)$, $(2, 2)$ を除く斜線部分で境界線は含まない．



9 (i) $2 \leq a$ のとき

$$a_n \geq 2 \text{ ならば } a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 = 2a_n - 2$$

$$a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} \geq 2$$

したがって, $a \geq 2$ のとき, すべての自然数 n について $a_n \geq 2$

(ii) $a \leq 1$ のとき $a_2 = |a - 1| + a - 1 = -(a - 1) + a - 1 = 0$

$$a_n = 0 \text{ ならば } a_{n+1} = |0 - 1| + 0 - 1 = 0$$

したがって, $a \leq 1$ のとき, 2 以上の自然数 n について $a_n = 0$

(iii) $1 < a < 2$ のとき, すべての自然数 n について, $a_n \neq 0$ と仮定する.

$$a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \text{ より}$$

$$a_{n+1} = \max(2a_n - 2, 0) \quad (*)$$

$a_N \leq 1$ となる自然数 N が存在するとき

$$a_{N+1} = 0$$

これは仮定に反するので, すべての自然数 n について

$$(**) \quad a_n > 1$$

となる. このとき, $(*)$ より

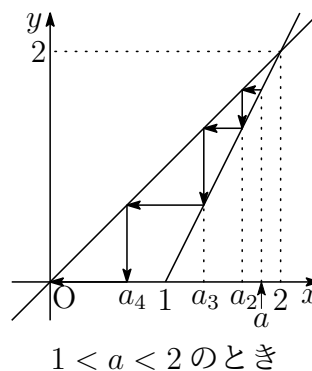
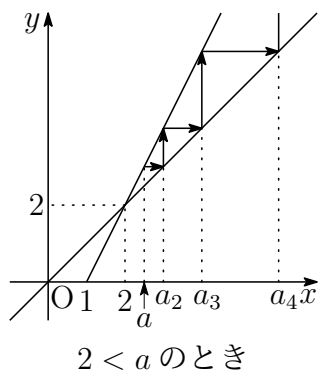
$$a_{n+1} = 2a_n - 2 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2)$$

$$\text{したがって} \quad a_n = 2 + (a - 2) \cdot 2^{n-1}$$

一方, 十分大きな n について, $a_n < 1$ となり, $(**)$ に反する.

(i)~(iii) より, 求める a の範囲は $\mathbf{a \geq 2}$

補足 $2 < a$ のとき, a_n は正の無限大に発散し, $a < 2$ のとき, a_n は 0 に収束する.



- 10** (1) 原点から放物線 $y = ax^2 - 2x + 1$ に引いた接線を $y = mx$ とし、これらの 2 式から y を消去して整理すると

$$ax^2 - (m+2)x + 1 = 0 \quad \text{係数について} \quad (m+2)^2 - 4a = 0$$

したがって $4a = (m+2)^2$ このとき、 $a \neq 0$ に注意して $a > 0$

ゆえに $m = -2 \pm 2\sqrt{a}$ 接線の方程式は $y = (-2 \pm 2\sqrt{a})x$

- (2) 2 本の接線の偏角を α, β とすると $(-90^\circ < \beta < \alpha < 90^\circ)$

$$\tan \alpha = -2 + 2\sqrt{a}, \quad \tan \beta = -2 - 2\sqrt{a}$$

$$\text{したがって} \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{4\sqrt{a}}{5 - 4a}$$

$\alpha - \beta = 45^\circ, 135^\circ$ であるから $\tan(\alpha - \beta) = \pm 1$

$$\text{上の 2 式から} \quad \frac{4\sqrt{a}}{5 - 4a} = \pm 1 \quad \text{ゆえに} \quad (4\sqrt{a})^2 = (5 - 4a)^2$$

$$\text{整理すると} \quad 16a^2 - 56a + 25 = 0 \quad \text{よって} \quad a = \frac{7 \pm 2\sqrt{6}}{4} \quad \blacksquare$$

- 11** (1) 正三角形 ABC の重心 G と円 K の中心は一致し $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$

$$\text{円 K の半径を } R \text{ とすると} \quad 2R = \frac{1}{\sin 60^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad R = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\overrightarrow{GP} = R \text{ を満たせばよいから, } |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$\left| \left(x - \frac{1}{3} \right) \vec{b} + \left(y - \frac{1}{3} \right) \vec{c} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{したがって} \quad \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(x - \frac{1}{3} \right) \left(y - \frac{1}{3} \right) + \left(y - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって} \quad x^2 + xy + y^2 - x - y = 0$$

$$(2) (1) \text{ の結果から} \quad \left(x + \frac{1}{2}y \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y \right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}y \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0$$

$$\text{したがって} \quad u^2 + v^2 - u - \frac{1}{\sqrt{3}}v = 0$$

$$\left(u - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって} \quad \text{中心} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \text{半径} \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ の円.} \quad \blacksquare$$

12 (1) $A = \int_0^1 f(t) dt$ とおくと $2f(x) = -6x^2 + 2A^2x - k^2 + 3$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (-6x^2 + 2A^2x - k^2 + 3) dx \\ 2A &= \left[-2x^3 + A^2x^2 + (-k^2 + 3)x \right]_0^1 \\ &= A^2 - k^2 + 1 \end{aligned}$$

したがって $(A - 1)^2 = k^2$ ゆえに $A = 1 \pm k$

よって $\int_0^1 f(t) dt = 1 \pm k$

(2) (1) の結果から $2f(x) = -6x^2 + 2(1 \pm k)^2x - k^2 + 3$

上式に $x = 1$ を代入すると, $f(1) = 0$ より

$$2(1 \pm k)^2 - k^2 - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k^2 \pm 4k - 1 = 0$$

したがって $(k \pm 2)^2 = 5$ よって $k = \pm 2 \pm \sqrt{5}$ (複号任意) ■