

平成 26 年度 一橋大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分
 商・経済・法・社会学部 数 I・II・A・B 平成 26 年 2 月 25 日

- 1 $a - b - 8$ と $b - c - 8$ が素数となるような素数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.
- 2 $0 < t < 1$ とし, 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 (t, t^2) における接線を l とする. C と l と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とし, C と l と直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする. $S_1 + S_2$ の最小値を求めよ.
- 3 円 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上の点 P における接線を l とする. 点 $(1, 0)$ を通り l と平行な直線を m とする. 直線 m と円 C の $(1, 0)$ 以外の共有点を P' とする. ただし, m が直線 $x = 1$ のときは P' を $(1, 0)$ とする.
 円 C 上の点 $P(s, t)$ から点 $P'(s', t')$ を得る上記の操作を T と呼ぶ.
- (1) s', t' をそれぞれ s と t の多項式として表せ,
- (2) 点 P に操作 T を n 回繰り返して得られる点を P_n とおく. P が $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき, P_1, P_2, P_3 を図示せよ.
- (3) 正の整数 n について, $P_n = P$ となるような点 P の個数を求めよ.
- 4 半径 1 の球が直円錐に内接している. この直円錐の底面の半径を r とし, 表面積を S とする.
- (1) S を r を用いて表せ.
- (2) S の最小値を求めよ.
- 5 数直線上の点 P を次の規則で移動させる. 一枚の硬貨を投げて, 表が出れば P を $+1$ だけ移動させ, 裏が出れば P を原点に関して対称な点に移動させる. P は初め原点にあるとし, 硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする.
- (1) $a_3 = 0$ となる確率を求めよ.
- (2) $a_4 = 1$ となる確率を求めよ.
- (3) $n \geq 3$ のとき, $a_n = n - 3$ となる確率を n を用いて表せ.

解答例

1 $a - b - 8, b - c - 8$ は素数であるから

$$a - b - 8 \geq 2, \quad b - c - 8 \geq 2 \quad \text{ゆえに} \quad a \geq b + 10, \quad b \geq c + 10$$

b, c は素数であるから、上式より、 a, b は奇素数である。

これより、 $a - b - 8$ は偶素数となるから

$$a - b - 8 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a = b + 10 \quad \cdots (*)$$

(i) c が奇素数のとき、 $b - c - 8$ は偶素数であるから

$$b - c - 8 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad c = b - 10 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(ii) c が偶素数、すなわち、 $c = 2$ のとき

$$b - c - 8 = b - 10 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(*), ①, ②において、 $b + 10, b, b - 10$ は素数である。

これらは法3について、互いに合同ではないので、これらの3数の中に3の倍数、すなわち、素数3が存在する。このとき、3数の大小関係に注意して

$$b - 10 = 3 \quad \text{ゆえに} \quad a = 23, b = 13$$

(i), (ii) より $(a, b, c) = (23, 13, 3), (23, 13, 2)$

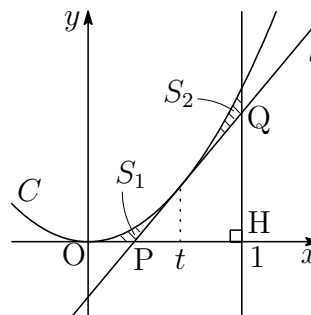
2 $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$

$C : y = x^2$ 上の点 (t, t^2) における接線 l の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 2tx - t^2$$

l と x 軸および直線 $x = 1$ との交点をそれぞれ P , Q とすると

$$P\left(\frac{t}{2}, 0\right), \quad Q(1, 2t - t^2)$$



直線 $x = 1$ と x 軸との交点を H とすると $H(1, 0)$

$f(t) = S_1 + S_2$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^1 x^2 dx - \triangle PHQ = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \cdot PH \cdot QH \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{2} \right) (2t - t^2) = -\frac{t^3}{4} + t^2 - t + \frac{1}{3}, \\ f'(t) &= -\frac{3}{4}t^2 + 2t - 1 = -\frac{1}{4}(t-2)(3t-2) \end{aligned}$$

$f(t)$ の増減表は次のようになる.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって 最小値 $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{27}$

- 3 (1) $A(1, 0)$, $\overrightarrow{OP} = (s, t)$ に垂直なベクトルを $\vec{u} = (t, -s)$ とし, 実数 α, β を用いて

$$\overrightarrow{OA} = \alpha \overrightarrow{OP} + \beta \vec{u}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} t \\ -s \end{pmatrix}$$

$s^2 + t^2 = 1$ に注意して, これを解くと $\alpha = s, \beta = t$

$\overrightarrow{OP'} = \alpha \overrightarrow{OP} + (-\beta) \vec{u}$ であるから

$$\begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} t \\ -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 - t^2 \\ 2st \end{pmatrix}$$

よって $s' = s^2 - t^2, t' = 2st$

別解 上の図で, $\angle AOM = \angle P'OM$. $(s, t) = (\cos \theta, \sin \theta)$ とおくと,
 $(s', t') = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ であるから

$$s' = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = s^2 - t^2, \quad t' = 2 \sin \theta \cos \theta = 2st$$

(2) $s^2 + t^2 = 1$ より, $s = \cos \theta, t = \sin \theta$ とおくと, (1) の結果から

$$s' = s^2 - t^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta,$$

$$t' = 2st = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

したがって, $P(\cos \theta, \sin \theta)$ のとき $P_n(\cos 2^n \theta, \sin 2^n \theta) \dots (*)$

$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ より, $\theta = \frac{\pi}{6}$ であるから

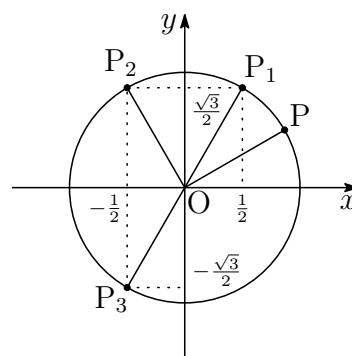
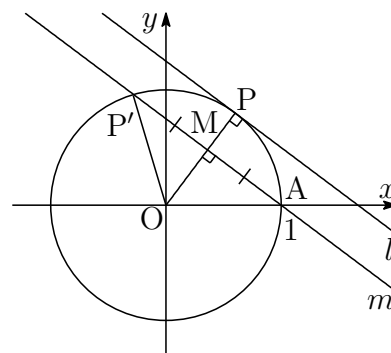
$$P_1\left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right), P_2\left(\cos \frac{2}{3}\pi, \sin \frac{2}{3}\pi\right), P_3\left(\cos \frac{4}{3}\pi, \sin \frac{4}{3}\pi\right)$$

ゆえに

$$P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



(3) (*) より, $P_n = P$ となるとき, 整数 k を用いて

$$2^n \theta = \theta + 2k\pi \quad \text{これを解いて} \quad \theta = \frac{2k}{2^n - 1} \pi$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{より} \quad 0 \leq \frac{2k}{2^n - 1} \pi < 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq k < 2^n - 1$$

よって, 求める点 P の個数は $2^n - 1$ (個)

4 (1) 直円錐の母線の長さを l とすると, 右の図において

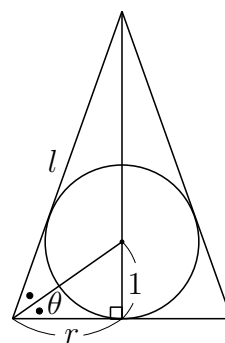
$$l \cos 2\theta = r, \quad \tan \theta = \frac{1}{r}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad \text{より}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \frac{1}{r^2}}{1 + \frac{1}{r^2}} = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$$

$$\text{したがって} \quad l = \frac{r}{\cos 2\theta} = \frac{r(r^2 + 1)}{r^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad S &= \pi r^2 + \frac{1}{2} l \cdot 2\pi r \\ &= \pi r^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{r(r^2 + 1)}{r^2 - 1} \cdot 2\pi r = \frac{2\pi r^4}{r^2 - 1} \end{aligned}$$

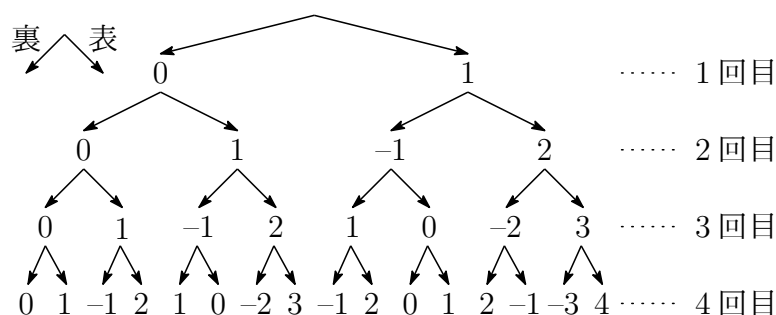


(2) (1) の結果および相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \left(r^2 - 1 + \frac{1}{r^2 - 1} + 2 \right) \\ &\geq 2\pi \left(2\sqrt{(r^2 - 1) \cdot \frac{1}{r^2 - 1}} + 2 \right) = 8\pi \end{aligned}$$

よって, 求める S の最小値は 8π

- 5 (1) 点 P の座標の推移は次のようになる.



よって, $a_3 = 0$ となる確率は $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

- (2) (1) に示した点 P の推移により, $a_4 = 1$ となる確率は $\frac{3}{16}$

- (3) $n \geq 3$ のとき, $a_n = 2 - n$ となるのは, 硬貨が $\overbrace{\text{裏 表} \cdots \text{表 裏}}^{n-2 \text{ 個}}$ の順に出るときで, その確率を q_n とすると

$$q_n = \frac{1}{2^n}$$

である. $n \geq 3$ のとき, $a_n = n - 3$ となる確率を p_n とすると

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{2} + q_n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

この確率漸化式から $2^{n+1}p_{n+1} - 2^n p_n = 1 \quad (n = 3, 4, \dots)$

$$n \geq 4 \text{ のとき } \sum_{k=3}^{n-1} (2^{k+1}p_{k+1} - 2^k p_k) = \sum_{k=3}^{n-1} 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^n p_n - 8p_3 = n - 3$$

$$(1) \text{ の結果から, } p_3 = \frac{1}{4} \text{ であるから } 2^n p_n = n - 1 \quad \text{ゆえに} \quad p_n = \frac{n-1}{2^n}$$

$$\text{上式は, } n = 3 \text{ のときも成立するから } p_n = \frac{n-1}{2^n}$$