

平成 25 年度 一橋大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分
 商・経済・法・社会学部 数 I・II・A・B 平成 25 年 2 月 25 日

1 $3p^3 - p^2q - pq^2 + 3q^3 = 2013$ を満たす正の整数 p, q の組をすべて求めよ.

2 平面上の 4 点 O, A, B, C が

$$OA = 4, \quad OB = 3, \quad OC = 2, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$$

を満たすとき, $\triangle ABC$ の面積の最大値を求めよ.

3 原点を O とする xy 平面上に, 放物線 $C: y = 1 - x^2$ がある. C 上に 2 点 $P(p, 1 - p^2), Q(q, 1 - q^2)$ を $p < q$ となるようにとる.

(1) 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を, p と q の式で表せ.

(2) $q = p + 1$ であるとき S の最小値を求めよ.

(3) $pq = -1$ であるとき S の最小値を求めよ.

4 t を正の定数とする. 原点を O とする空間内に, 2 点 $A(2t, 2t, 0), B(0, 0, t)$ がある. また動点 P は

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$$

を満たすように動く. OP の最大値が 3 となるような t の値を求めよ.

5 サイコロを n 回投げ, k 回目に出た目を a_k とする. また, s_n を $s_n = \sum_{k=1}^n 10^{n-k} a_k$ で定める.

(1) s_n が 4 で割り切れる確率を求めよ.

(2) s_n が 6 で割り切れる確率を求めよ.

(3) s_n が 7 で割り切れる確率を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad 3p^3 - p^2q - pq^2 + 3q^3 = 2013 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} 3(p^3 + q^3) - pq(p + q) &= 2013 \\ (p + q)(3p^2 - 4pq + 3q^2) &= 3 \cdot 11 \cdot 61 \end{aligned}$$

$$\text{ここで} \quad 3p^2 - 4pq + 3q^2 = 2(p - q)^2 + p^2 + q^2 \geq p + q$$

したがって、次の場合がある.

$$(p + q, 3p^2 - 4pq + 3q^2) = (3, 11 \cdot 61), (11, 3 \cdot 61), (3 \cdot 11, 61)$$

また, $3p^2 - 4pq + 3q^2 = 3(p + q)^2 - 10pq$ であるから

$$(i) \quad p + q = 3, \quad 3(p + q)^2 - 10pq = 11 \cdot 61 \text{ のとき} \quad 5pq = -322$$

p, q は整数であるから, 不適.

$$(ii) \quad p + q = 11, \quad 3(p + q)^2 - 10pq = 3 \cdot 61 \text{ のとき} \quad pq = 18$$

これを解いて $(p, q) = (2, 9), (9, 2)$

$$(iii) \quad p + q = 3 \cdot 11, \quad 3(p + q)^2 - 10pq = 61 \text{ のとき} \quad 5pq = 1603$$

p, q は整数であるから, 不適.

$$(i) \sim (iii) \text{ より} \quad (p, q) = (2, 9), (9, 2)$$

2 $\theta = \angle BOC$ とおくと

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}|} = \frac{3}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = 60^\circ$$

$\triangle OBC$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BC^2 &= OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cos 60^\circ \\ &= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 7 \end{aligned}$$

ゆえに $BC = \sqrt{7}$

O から直線 BC に垂線 OH を引くと $\frac{1}{2}BC \cdot OH = \frac{1}{2}OB \cdot OC \sin 60^\circ$

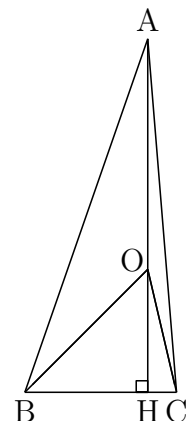
ゆえに $\frac{1}{2}\sqrt{7}OH = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ これを解いて $OH = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\triangle ABC$ の面積が最大となるのは、HO の延長に A があるときで、このとき

$$AH = OA + OH = 4 + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

よって、求める $\triangle ABC$ の最大値は

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \sqrt{7} \left(4 + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right) = 2\sqrt{7} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



3 (1) 2点 $P(p, 1 - p^2)$, $Q(q, 1 - q^2)$ を通る直線 PQ の方程式は

$$y - (1 - p^2) = \frac{1 - q^2 - (1 - p^2)}{q - p}(x - p)$$

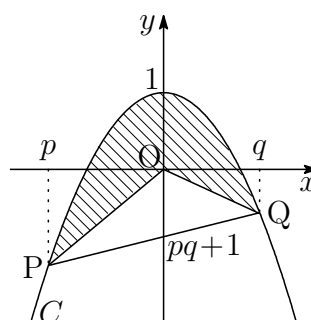
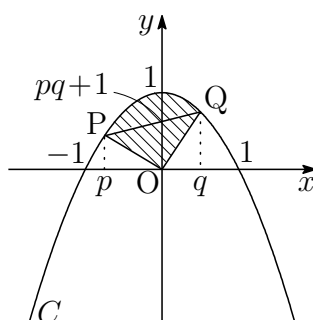
すなわち $y = -(p + q)x + pq + 1$

C と直線 PQ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると, $p < q$ に注意して

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_p^q (1 - x^2 - \{-(p + q)x + pq + 1\}) dx \\ &= \int_p^q (x - p)(q - x) dx = \frac{1}{6}(q - p)^3 \end{aligned}$$

$\triangle OPQ$ の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} |p(1 - q^2) - q(1 - p^2)| \\ &= \frac{1}{2} |(p - q)(pq + 1)| \\ &= \frac{1}{2} (q - p) |pq + 1| \end{aligned}$$



(i) $pq + 1 \geq 0$ のとき

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{6}(q - p)^3 + \frac{1}{2}(q - p)(pq + 1)$$

(ii) $pq + 1 < 0$ のとき

$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{6}(q - p)^3 - \frac{1}{2}(q - p)(-pq - 1)$$

(i), (ii) の結果から

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}(q - p)\{(q - p)^2 + 3pq + 3\} \quad \cdots \textcircled{1} \\ &= \frac{1}{6}(q - p)(p^2 + pq + q^2 + 3) \end{aligned}$$

(2) $q = p + 1$ を ① に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}\{1^2 + 3p(p+1) + 3\} = \frac{1}{2}p(p+1) + \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{24} \end{aligned}$$

$p = -\frac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\frac{13}{24}$ をとる.

(3) $pq = -1$ のとき, $p < 0 < q$ であるから, $p = -\frac{1}{q}$ を ① に代入すると

$$S = \frac{1}{6}\left(q + \frac{1}{q}\right)^3$$

$q > 0$ であるから, 相加・相乗平均の関係により

$$q + \frac{1}{q} \geq 2\sqrt{q \cdot \frac{1}{q}} = 2$$

等号が成立するのは, $q = \frac{1}{q}$, すなわち, $q = 1$ のときであるから

$$S \geq \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{4}{3}$$

よって, 求める S の最小値は $\frac{4}{3}$

$$\boxed{4} \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3 \text{ より}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) = 3$$

$$3|\overrightarrow{OP}|^2 - 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3$$

$$|\overrightarrow{OP}|^2 - \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1$$

$$\overrightarrow{OA} = (2t, 2t, 0), \overrightarrow{OB} = (0, 0, t) \text{ より } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\text{ここで, } \overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \text{ とおくと}$$

$$|\overrightarrow{OP}|^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = 1$$

$$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 + 1$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}(2t, 2t, t) \text{ であるから } |\overrightarrow{OC}| = |t| = t$$

したがって, P は C を中心とする半径 $\sqrt{t^2 + 1}$ の球面上を動く.

OP が最大となるとき, P は OC の延長線上にあるから

$$OC + CP = OP \quad \text{ゆえに} \quad t + \sqrt{t^2 + 1} = 3$$

$$\sqrt{t^2 + 1} = 3 - t \text{ の両辺を平方して } t^2 + 1 = 9 - 6t + t^2$$

$$t > 0 \text{ に注意してこれを解くと } t = \frac{4}{3}$$

5 (1) $n = 1$ のとき, s_1 が 4 で割り切れるのは, $a_1 = 4$ の場合である.

したがって, この確率は $\frac{1}{6}$

$n \geq 2$ のとき, $100 \equiv 0 \pmod{4}$ であるから

$$s_n \equiv 10a_{n-1} + a_n \pmod{4}$$

$s_n \equiv 0 \pmod{4}$ となるのは

$$(a_{n-1}, a_n) = (1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 2), (3, 6), (4, 4), \\ (5, 2), (5, 6), (6, 4)$$

このときの確率は $\frac{9}{6^2} = \frac{1}{4}$

よって, 求める確率は $n = 1$ のとき $\frac{1}{6}$, $n \geq 2$ のとき $\frac{1}{4}$

(2) $n = 1$ のとき, s_1 が 6 で割り切れるのは, $a_1 = 6$ の場合である.

したがって, この確率は $\frac{1}{6}$

$n \geq 2$ のとき

$$s_n = \sum_{k=1}^n 10^{n-k} a_k = 10 \sum_{k=1}^{n-1} 10^{n-1-k} a_k + a_n = 10s_{n-1} + a_n$$

$10 \equiv 4 \pmod{6}$ であるから $s_n \equiv 4s_{n-1} + a_n \pmod{6}$

$s_n \equiv 0 \pmod{6}$ となる確率を p_n とおく.

$s_n \equiv 0 \pmod{6}$ となるのは, 法 6 について

$$(s_{n-1}, a_n) = (0, 6), (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 2), (5, 4)$$

したがって, 次の確率漸化式が成立する.

$$p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6}(1 - p_{n-1}) \quad \text{ゆえに} \quad p_n = \frac{1}{6}$$

よって, 求める確率は $\frac{1}{6}$

(3) $n = 1$ のとき, s_1 が 7 で割り切れることはないので, この確率は 0

$n \geq 2$ のとき

$$s_n = \sum_{k=1}^n 10^{n-k} a_k = 10 \sum_{k=1}^{n-1} 10^{n-1-k} a_k + a_n = 10s_{n-1} + a_n$$

$10 \equiv 3 \pmod{7}$ であるから $s_n \equiv 3s_{n-1} + a_n \pmod{7}$

$s_n \equiv 0 \pmod{7}$ となる確率を q_n とおく.

$s_n \equiv 0 \pmod{7}$ となるのは, 法 7 について

$$(s_{n-1}, a_n) = (1, 4), (2, 1), (3, 5), (4, 2), (5, 6), (6, 3)$$

したがって, 次の確率漸化式が成立する.

$$q_1 = 0, \quad q_n = \frac{1}{6}(1 - q_{n-1})$$

$$\text{ゆえに} \quad q_n - \frac{1}{7} = -\frac{1}{6} \left(q_{n-1} - \frac{1}{7} \right) \quad \text{すなわち} \quad q_n = \frac{1}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{6} \right)^{n-1} \right\}$$

$$\text{よって, 求める確率は} \quad \frac{1}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{6} \right)^{n-1} \right\}$$