

平成 23 年度 一橋大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分
商・経済・法・社会学部 数 I・II・A・B 平成 23 年 2 月 25 日

- 1** (1) 自然数 x, y は, $1 < x < y$ および

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{5}{3}$$

をみたす. x, y の組をすべて求めよ.

- (2) 自然数 x, y, z は, $1 < x < y < z$ および

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5}$$

をみたす. x, y, z の組をすべて求めよ.

- 2** 点 O を中心とする半径 r の円周上に, 2 点 A, B を $\angle AOB < \frac{\pi}{2}$ となるようにとり $\theta = \angle AOB$ とおく. この円周上に点 C を, 線分 OC が線分 AB と交わるようにとり, 線分 AB 上に点 D をとる. また, 点 P は線分 OA 上を, 点 Q は線分 OB 上を, それぞれ動くとする.

- (1) $CP + PQ + QC$ の最小値を r と θ で表せ.
 (2) $a = OD$ とおく. $DP + PQ + QD$ の最小値を a と θ で表せ.
 (3) さらに, 点 D が線分 AB 上を動くときの $DP + PQ + QD$ の最小値を r と θ で表せ.

- 3** xy 平面上に放物線 $C: y = -3x^2 + 3$ と 2 点 $A(1, 0), P(0, 3p)$ がある. 線分 AP と C は, A とは異なる点 Q を共有している.

- (1) 定数 p の存在する範囲を求めよ.
 (2) S_1 を, C と線分 AQ で囲まれた領域とし, S_2 を, C , 線分 QP , および y 軸とで囲まれた領域とする. S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ.

- 4 a, b, c を正の定数とする．空間内に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある．

- (1) 辺 AB を底辺とするととき， $\triangle ABC$ の高さを a, b, c で表せ．
 (2) $\triangle ABC$, $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ の面積をそれぞれ S, S_1, S_2, S_3 とする．ただし， O は原点である．このとき，不等式

$$\sqrt{3}S \geq S_1 + S_2 + S_3$$

が成り立つことを示せ．

- (3) (2) の不等式において等号が成り立つための条件を求めよ．

- 5 A と B の 2 人が，1 個のサイコロを次の手順により投げ合う．

1 回目は A が投げる．

1, 2, 3 の目が出たら，次の回には同じ人が投げる．

4, 5 の目が出たら，次の回には別の人が投げる．

6 の目が出たら，投げた人を勝ちとしそれ以降は投げない．

- (1) n 回目に A がサイコロを投げる確率 a_n を求めよ．
 (2) ちょうど n 回目のサイコロ投げで A が勝つ確率 p_n を求めよ．
 (3) n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n を求めよ．

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{5}{3} \quad \text{より} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{2}{3}$$

$$\text{したがって} \quad 4xy - 6x - 6y = 6 \quad \text{ゆえに} \quad (2x - 3)(2y - 3) = 15$$

$$1 < x < y \text{ より, } -1 < 2x - 3 < 2y - 3 \text{ に注意して}$$

$$(2x - 3, 2y - 3) = (1, 15), (3, 5) \quad \text{よって} \quad (x, y) = (2, 9), (3, 4)$$

$$(2) \quad 1 < x < y < z \text{ より, } 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{y} > 1 + \frac{1}{z} \text{ であるから, } x \geq 3 \text{ のとき}$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) = 2$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5} \text{ をみたすとき, } x = 2 \text{ であるから}$$

$$\frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5} \quad \text{ゆえに} \quad \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{8}{5}$$

$$\text{したがって} \quad 9yz - 15y - 15z = 15 \quad \text{ゆえに} \quad (3y - 5)(3z - 5) = 40$$

$$2 < y < z \text{ より, } 1 < 3y - 5 < 3z - 5 \text{ に注意して}$$

$$\begin{cases} 3y - 5 = 4 \\ 3z - 5 = 10 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad y = 3, z = 5$$

$$\text{よって} \quad (x, y, z) = (2, 3, 5)$$

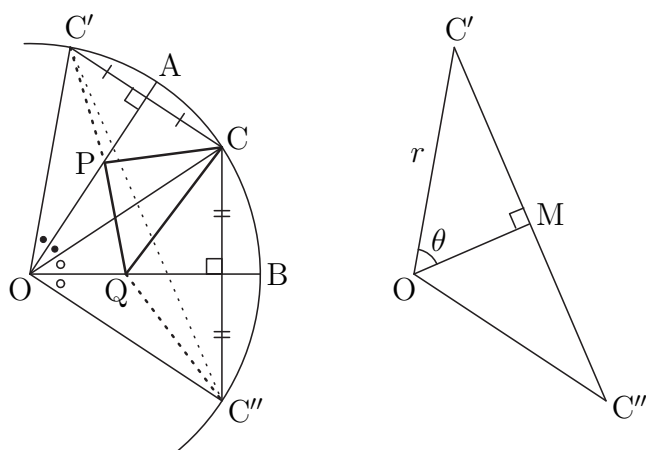
- 2 (1) 線分 OA, OB に関して C と対称な点をそれぞれ C' , C'' とすると

$$CP = C'P, \quad QC = QC'', \quad \angle C'OC'' = 2\theta$$

したがって $CP + PQ + QC = C'P + PQ + QC'' \geq C'C''$

求める最小値は線分 $C'C''$ であるから, $C'C''$ の中点を M とすると

$$C'C'' = 2C'M = 2r \sin \theta$$

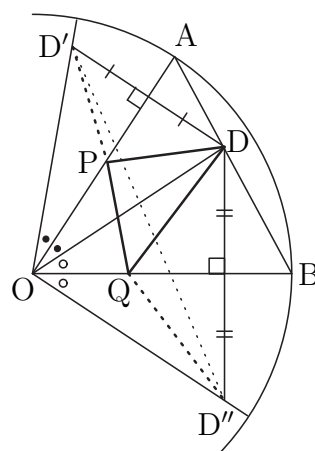


- (2) 線分 OA, OB に関して D と対称な点をそれぞれ D' , D'' とすると,

$$OD = OD' = OD'' = a$$

よって, (1) と同様に, 求める最小値は

$$2a \sin \theta$$



- (3) D が AB の中点であるとき, $\angle AOD = \frac{\theta}{2}$ となり

$$a = r \cos \angle AOD = r \cos \frac{\theta}{2}$$

このとき, a は最小となり, これを (2) の結果に代入して

$$2r \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta$$

3 (1) 直線 AP の方程式は

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{3p} = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = -3px + 3p$$

これと $C: y = -3x^2 + 3$ から y を消去すると

$$-3px + 3p = -3x^2 + 3 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x-p+1) = 0$$

Q は A と異なる線分 AP 上の点であるから, Q の x 座標 $p-1$ について

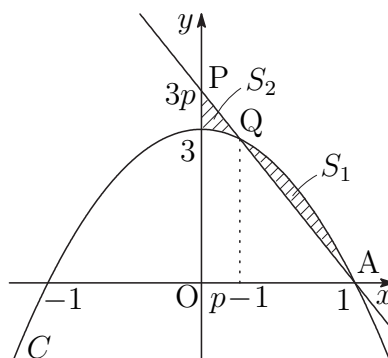
$$0 \leq p-1 < 1 \quad \text{すなわち} \quad 1 \leq p < 2$$

(2) S_1 は C の x^2 の係数に注意して

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{3}{6} \{1 - (p-1)\}^3 \\ &= \frac{1}{2} (2-p)^3 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

C と $x \geq 0, y \geq 0$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_0^1 (-3x^2 + 3) dx = \left[-x^3 + 3x \right]_0^1 = 2$$



$\triangle OAP$ の面積は $\frac{3}{2}p$ であるから

$$2 - S_1 = \frac{3}{2}p - S_2 \quad \text{ゆえに} \quad S_2 = S_1 + \frac{3}{2}p - 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より, $f(p) = S_1 + S_2$ とおくと

$$f(p) = S_1 + S_2 = 2S_1 + \frac{3}{2}p - 2 = (2-p)^3 + \frac{3}{2}p - 2,$$

$$f'(p) = -3(p-2)^2 + \frac{3}{2} = -3 \left\{ (p-2)^2 - \frac{1}{2} \right\}$$

(1) の結果に注意して, $f'(p) = 0$ を解くと $p = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$

p	1	$\dots$	$\frac{4-\sqrt{2}}{2}$	$\dots$	(2)
$f'(p)$		$-$	0	$+$	
$f(p)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって, 求める p の値は $p = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$

- 4 (1) $\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$ より, $\triangle ABC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} 2S &= \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2) - (a^2)^2} = \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \end{aligned}$$

求める高さは $\frac{2S}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- (2) $\overrightarrow{OA} = (a, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (0, b, 0)$, $\overrightarrow{OC} = (0, 0, c)$ より

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA}$$

$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ であるから $2S_1 = ab$, $2S_2 = bc$, $2S_3 = ca$
 $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (ab, bc, ca)$ について, $|\vec{u}||\vec{v}| \geq \vec{u} \cdot \vec{v}$ であるから

$$\sqrt{3}\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \geq ab + bc + ca$$

よって $\sqrt{3}S \geq S_1 + S_2 + S_3$

- (3) (2) の等号が成立するとき, $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が同じ向きであるから

$$ab = bc = ca \quad \text{すなわち} \quad a = b = c$$

- 5 (1) n 回目に A, B がサイコロを投げる確率をそれぞれ a_n, b_n とすると, 次の確率漸化式が成立する.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$a_1 = 1, b_1 = 0$ であるから

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{5}{6}(a_n + b_n) \\ a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{6}(a_n - b_n) \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} a_n + b_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ a_n - b_n = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \end{cases}$$

$$\text{よって} \quad a_n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \right\}$$

$$(2) \quad (1) \text{ の結果から} \quad p_n = \frac{1}{6}a_n = \frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \right\}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=1}^n p_k = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 - \frac{5}{6}} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n}{1 - \frac{1}{6}} \\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$