

平成22年度 一橋大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
 商・経済・法・社会学部 数I・II・A・B 平成22年2月25日

1 実数 p, q, r に対して, 3次多項式 $f(x)$ を $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ と定める. 実数 a, c , および0でない実数 b に対して, $a + bi$ と c はいずれも方程式 $f(x) = 0$ の解であるとする. ただし, i は虚数単位を表す.

(1) $y = f(x)$ のグラフにおいて, 点 $(a, f(a))$ における接線の傾きを $s(a)$ とし, 点 $(c, f(c))$ における接線の傾きを $s(c)$ とする. $a \neq c$ のとき, $s(a)$ と $s(c)$ の大小を比較せよ.

(2) さらに, a, c は整数であり, b は0でない整数であるとする. 次を証明せよ.

(i) p, q, r はすべて整数である.

(ii) p が2の倍数であり, q が4の倍数であるならば, a, b, c はすべて2の倍数である.

2 a を実数とする. 傾きが m である2つの直線が, 曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ とそれぞれ点 A, 点 B で接している.

(1) 線分 AB の中点を C とすると, C は曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ 上にあることを示せ.

(2) 直線 AB の方程式が $y = -x - 1$ であるとき, a, m の値を求めよ.

3 原点を O とする xyz 空間内で, x 軸上の点 A, xy 平面上の点 B, z 軸上の点 C を, 次をみたすように定める.

$$\angle OAC = \angle OBC = \theta, \quad \angle AOB = 2\theta, \quad OC = 3$$

ただし, A の x 座標, B の y 座標, C の z 座標はいずれも正であるとする. さらに, $\triangle ABC$ 内の点のうち, O からの距離が最小の点を H とする. また, $t = \tan \theta$ とおく.

(1) 線分 OH の長さを t の式で表せ.

(2) H の z 座標を t の式で表せ.

- 4** 0以上の整数 a_1, a_2 が与えられたとき, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$$

により定める.

- (1) $a_1 = 1, a_2 = 2$ のとき, a_{2010} を 10 で割った余りを求めよ.
 - (2) $a_2 = 3a_1$ のとき, $a_{n+4} - a_n$ は 10 の倍数であることを示せ.
- 5** n を 3 以上の自然数とする. サイコロを n 回投げ, 出た目の数をそれぞれ順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする. $i = 2, 3, \dots, n$ に対して $X_i = X_{i-1}$ となる事象を A_i とする.

- (1) $A_2, A_3, \dots, A_n$ のうち少なくとも 1 つが起こる確率 p_n を求めよ.
- (2) $A_2, A_3, \dots, A_n$ のうち少なくとも 2 つが起こる確率 q_n を求めよ.

解答例

- 1 (1) $a + bi$, c が実係数の 3 次方程式 $f(x) = 0$ の解であるから, $a - bi$ もこの方程式である. 方程式の解と係数の関係により

$$\begin{aligned}(a + bi) + (a - bi) + c &= -p \\ (a + bi)(a - bi) + (a + bi)c + (a - bi)c &= q \\ (a + bi)(a - bi)c &= -r\end{aligned}$$

したがって $(*) \begin{cases} p = -2a - c \\ q = a^2 + b^2 + 2ca \\ r = -(a^2 + b^2)c \end{cases}$

$$f(x) = x^3 - (2a + c)x^2 + (a^2 + b^2 + 2ca)x - (a^2 + b^2)c \text{ より}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2(2a + c)x + a^2 + b^2 + 2ca$$

$$\text{ゆえに } f'(a) = b^2, f'(c) = c^2 - 2ca + a^2 + b^2 = (c - a)^2 + b^2$$

$$a \neq c \text{ であるから } f'(a) < f'(c) \text{ よって } s(a) < s(c)$$

別解 $f(x)$ は, 実数を係数とする 3 次多項式で, $a + bi$, c が方程式 $f(x) = 0$ の解であるから, $a - bi$ も $f(x) = 0$ の解であることと x^3 の係数に注意して

$$\begin{aligned}f(x) &= (x - a - bi)(x - a + bi)(x - c) \\ &= \{(x - a)^2 + b^2\}(x - c) \\ f'(x) &= 2(x - a)(x - c) + (x - a)^2 + b^2\end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } f'(a) = b^2, f'(c) = (c - a)^2 + b^2 \quad a \neq c \text{ であるから } s(a) < s(c)$$

(2) (i) $(*)$ より, 明らか.

(ii) p は 2 の倍数であるから, $(*)$ の第 1 式より, c は 2 の倍数である.
さらに, $2ca$ と q が 4 の倍数であるから, $(*)$ の第 2 式より

$$a^2 + b^2 \text{ は 4 の倍数である } \dots (**)$$

これから, a , b の偶奇は一致する.

$$a = 2m + 1, b = 2n + 1 \text{ とすると } (m, n \text{ は整数})$$

$$a^2 + b^2 = 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2$$

これは, $(**)$ に反する. したがって, $a = 2m$, $b = 2n$ とすると

$$a^2 + b^2 = 4(m^2 + n^2)$$

このとき, $(**)$ を満たす. よって, a , b , c はすべて 2 の倍数である.

2 (1) $f(x) = x^3 - 3ax^2$ とおくと $f'(x) = 3x^2 - 6ax$

2点 A, B の x 座標をそれぞれ α, β とすると, こらは 2 次方程式

$$3x^2 - 6ax = m \quad \text{すなわち} \quad 3x^2 - 6ax - m = 0$$

の解であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2a, \quad \alpha\beta = -\frac{m}{3}$$

2点 A, B の中点 C の x 座標は $\frac{\alpha + \beta}{2} = a$

このとき $f(a) = a^3 - 3a \cdot a^2 = -2a^3$

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= (\alpha^3 - 3a\alpha^2) + (\beta^3 - 3a\beta^2) \\ &= \alpha^3 + \beta^3 - 3a(\alpha^2 + \beta^2) \\ &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) - 3a\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} \\ &= (2a)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{m}{3}\right) \cdot 2a - 3a\left\{(2a)^2 - 2\left(-\frac{m}{3}\right)\right\} \\ &= -4a^3 \end{aligned}$$

したがって $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = -2a^3 = f(a)$

よって, $C\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}\right)$ は曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$.

(2) 直線 AB の傾きは

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} &= \frac{(\beta^3 - 3a\beta^2) - (\alpha^3 - 3a\alpha^2)}{\beta - \alpha} \\ &= (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - 3a(\alpha + \beta) \\ &= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta - 3a(\alpha + \beta) \\ &= (2a)^2 - \left(-\frac{m}{3}\right) - 3a \cdot 2a = \frac{m}{3} - 2a^2 \end{aligned}$$

これが -1 であるから $\frac{m}{3} - 2a^2 = -1 \quad \dots \textcircled{1}$

$C(a, -2a^3)$ は直線 $y = -x - 1$ 上にあるから

$$-2a^3 = -a - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a - 1)(2a^2 + 2a + 1) = 0$$

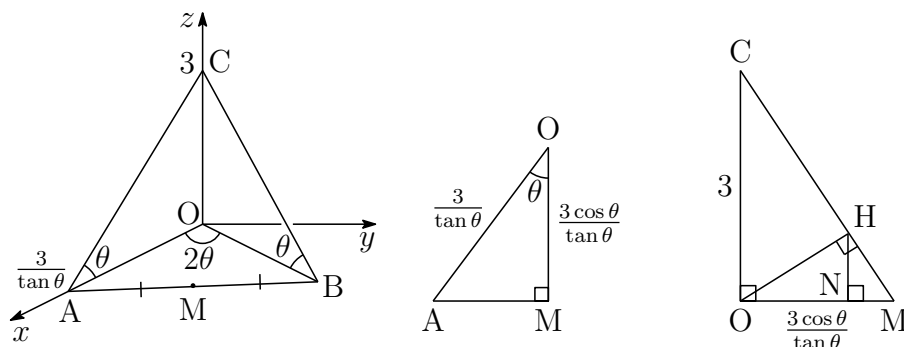
ここで, $2a^2 + 2a + 1 = 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$ であるから $a = 1$

これを $\textcircled{1}$ に代入して $m = 3$

3 (1) $OA \tan \theta = 3$ であるから $OA = \frac{3}{\tan \theta}$

$\triangle CAO \equiv \triangle CBO$ であるから、辺 AB の中点を M とすると、中線 OM は $\angle AOB$ の二等分線であるから

$$OM = OA \cos \theta = \frac{3 \cos \theta}{\tan \theta} = \frac{3}{\tan \theta \sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{3}{t \sqrt{1 + t^2}}$$



直角三角形 CMO に三平方の定理を適用すると

$$CM^2 = CO^2 + OM^2 = 9 + \frac{9}{t^2(1+t^2)} = \frac{9(1+t^2+t^4)}{t^2(1+t^2)}$$

ゆえに $CM = \frac{3\sqrt{1+t^2+t^4}}{t\sqrt{1+t^2}}$

したがって $CM : MO = \frac{3\sqrt{1+t^2+t^4}}{t\sqrt{1+t^2}} : \frac{3}{t\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{1+t^2+t^4} : 1$

$\triangle CMO \sim \triangle COH$ より、 $CM : MO = CO : OH$ であるから

$$\sqrt{1+t^2+t^4} : 1 = 3 : OH$$

よって $OH = \frac{3}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$

(2) H から OM に垂線 HN を引く.

$\triangle CMO \sim \triangle OHN$ より、 $CM : MO = OH : HN$ であるから

$$\sqrt{1+t^2+t^4} : 1 = \frac{3}{\sqrt{1+t^2+t^4}} : HN$$

求める点 H の z 座標は、 HN であるから $\frac{3}{1+t^2+t^4}$

- 4** (1) $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ より

$$a_{n+2} \equiv a_{n+1} \pmod{2}$$

すなわち, $n \geq 2$ のとき, a_n は偶数である.

また $a_{n+2} \equiv a_{n+1} + a_n \pmod{5}$

したがって, a_n を 5 で割った余りは

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_n	1	2	3	0	3	3	1	4	0	4	4	3	2

n	14	15	16	17	18	19	20	21	22
a_n	0	2	2	4	1	0	1	1	2

$a_1 \equiv a_{21}$, $a_2 \equiv a_{22} \pmod{5}$ であるから, a_n を 5 で割った余りには周期性がある (周期 20). したがって

$$a_{2010} \equiv a_{10} \equiv 4 \pmod{5}$$

上式から a_{2010} を 10 で割った余りは 4 または 9 であるが, a_{2010} が偶数であるから, a_{2010} を 10 で割った余りは **4**

- (2) $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $a_2 = 3a_1$ より

n	1	2	3	4	5	6
a_n	a_1	$3a_1$	$9a_1$	$27a_1$	$81a_1$	$243a_1$

$a_5 - a_1 = 80a_1$, $a_6 - a_2 = 240a_1$ より, $n = 1, 2$ のとき

$$a_{n+4} - a_n$$

は 10 の倍数である. 与えられた漸化式から

$$a_{n+6} = a_{n+5} + 6a_{n+4}$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$a_{n+6} - a_{n+2} = (a_{n+5} - a_{n+1}) + 6(a_{n+4} - a_n)$$

$a_5 - a_1$ および $a_6 - a_2$ は 10 の倍数であるから, 上の漸化式より, すべての自然数 n について, $a_{n+4} - a_n$ は 10 の倍数である.

5 (1) $A_2, A_3, \dots, A_n$ のうちどれも起きない確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \dots \textcircled{1}$$

p_n は、この余事象の確率であるから

$$p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

(2) $A_2, A_3, \dots, A_n$ のうち 1 つだけ起きる確率は

$${}_{n-1}C_1 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} = \frac{n-1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \dots \textcircled{2}$$

q_n は ①, ② の余事象の確率であるから

$$q_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{n-1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} = 1 - \frac{n+4}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$