

平成 21 年度 一橋大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分
 商・経済・法・社会学部 数 I・II・A・B 平成 21 年 2 月 25 日

- 1 2 以上の整数 m, n は $m^3 + 1^3 = n^3 + 10^3$ をみたす. m, n を求めよ.
- 2 (1) 任意の角 θ に対して, $-2 \leq x \cos \theta + y \sin \theta \leq y + 1$ が成立するような点 (x, y) の全体からなる領域を xy 平面上に図示し, その面積を求めよ.
 (2) 任意の角 α, β に対して, $-1 \leq x^2 \cos \alpha + y \sin \beta \leq 1$ が成立するような点 (x, y) の全体からなる領域を xy 平面上に図示し, その面積を求めよ.
- 3 p, q を実数とする. 放物線 $y = x^2 - 2px + q$ が, 中心 $(p, 2q)$ で半径 1 の円と中心 (p, p) で半径 1 の円の両方と共有点をもつ. この放物線の頂点が存在する領域を xy 平面上に図示せよ.
- 4 一辺の長さが 2 の正三角形 ABC を平面上におく. $\triangle ABC$ を 1 つの辺に関して 180° 折り返すという操作を繰り返し行う. 辺 BC に関する折り返しを T_A , 辺 CA に関する折り返しを T_B , 辺 AB に関する折り返しを T_C とする. $\triangle ABC$ は, 最初 3 点 A, B, C がそれぞれ平面上の 3 点 O, B', C' 上に置かれているとする.
- (1) T_A, T_C, T_B, T_C, T_A の順に折り返し操作を施したときの頂点 A の移り先を P とする. また, $T_A, T_C, T_B, T_A, T_C, T_B, T_A$ の順に折り返し操作を施したときの頂点 A の移り先を Q とする. $\theta = \angle POQ$ とするとき, $\cos \theta$ の値を求めよ.
- (2) 整数 k, ℓ に対して, $\overrightarrow{OR} = 3k\overrightarrow{OB'} + 3\ell\overrightarrow{OC'}$ により定められる点 R は, T_A, T_B, T_C の折り返し操作を組み合わせることにより, 点 A の移り先になることを示せ.

5 X, Y, Z と書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつある. この中から 1 枚のカードが選ばれたとき, xy 平面上の点 P を次の規則にしたがって移動する.

- X のカードが選ばれたとき, P を x 軸の正の方向に 1 だけ移動する.
- Y のカードが選ばれたとき, P を y 軸の正の方向に 1 だけ移動する.
- Z のカードが選ばれたとき, P は移動せずそのままの位置にとどまる.

(1) n を正の整数とする. 最初, 点 P を原点の位置におく. X のカードと Y のカードの 2 枚から無作為に 1 枚を選び, P を, 上の規則にしたがって移動するという試行を n 回繰り返す.

(i) n 回の試行の後に P が到達可能な点の個数を求めよ.

(ii) P が到達する確率が最大の点をすべて求めよ.

(2) n を正の 3 の倍数とする. 最初, 点 P を原点の位置におく. X のカード, Y のカード, Z のカードの 3 枚のカードから無作為に 1 枚を選び, P を, 上の規則にしたがって移動するという試行を n 回繰り返す.

(i) n 回の試行の後に P が到達可能な点の個数を求めよ.

(ii) P が到達する確率が最大の点をすべて求めよ.

解答例

1 $m^3 + 1^3 = n^3 + 10^3$ より, $m^3 - n^3 = 10^3 - 1^3$ であるから

$$(m - n)\{(m - n)^2 + 3mn\} = 3^3 \cdot 37 \quad \cdots (*)$$

m, n は 2 以上の整数であるから, $(m - n)^2 + 3mn > 0$ より

$$m - n > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$(m - n)^2 < (m - n)^2 + 3mn$, $999 < 10^3$ であるから, $(*)$ より

$$(m - n)^3 < 10^3 \quad \text{ゆえに} \quad m - n < 10 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より $0 < m - n < 10$

したがって, 上式および $(*)$ より, 次の (i)~(iii) の場合がある.

(i) $m - n = 1$ のとき, これを $(*)$ に代入すると

$$1 + 3mn = 3^3 \cdot 37 \quad \text{ゆえに} \quad 1 = 3(3^2 \cdot 37 - mn)$$

上式をみたす整数 m, n は存在しない.

(ii) $m - n = 3$ のとき, これを $(*)$ に代入すると

$$3(3^2 + 3mn) = 3^3 \cdot 37 \quad \text{ゆえに} \quad mn = 108$$

$m = n + 3$ を上の第 2 式に代入すると

$$(n + 3)n = 108 \quad \text{ゆえに} \quad (n - 9)(n + 12) = 0$$

n は 2 以上の整数であるから $n = 9$ このとき $m = 12$

(iii) $m - n = 9$ のとき, これを $(*)$ に代入すると

$$9(9^2 + 3mn) = 3^3 \cdot 37 \quad \text{ゆえに} \quad mn = 10$$

$m = n + 9$ を上の第 2 式に代入すると

$$(n + 9)n = 10 \quad \text{ゆえに} \quad (n + 10)(n - 1) = 0$$

n は 2 以上の整数であるから, これをみたす n は存在しない.

(i)~(iii) より **$m = 12, n = 9$**

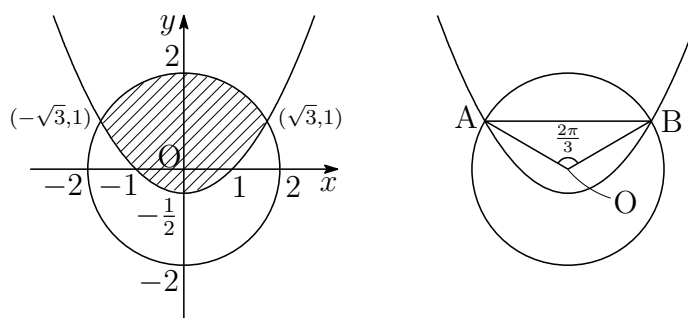
- 2 (1) $\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\vec{v} = (x, y)$ とすると, $-|\vec{u}||\vec{v}| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}|$ より

$$-\sqrt{x^2 + y^2} \leq x \cos \theta + y \sin \theta \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

任意の角 θ に対して, $-2 \leq x \cos \theta + y \sin \theta \leq y + 1$ が成立するから

$$\begin{cases} -2 \leq -\sqrt{x^2 + y^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq y + 1 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad (*) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq \frac{1}{2}(x^2 - 1) \end{cases}$$

よって, $(*)$ の表す領域は, 左下の図の斜線部分で境界線を含む.



円 $x^2 + y^2 = 4$ と放物線 $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ の方程式から y を消去すると

$$x^2 + \frac{1}{4}(x^2 - 1)^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad (x^2 + 5)(x^2 - 3) = 0$$

したがって $x = \pm\sqrt{3}$ これを放物線の方程式に代入して $y = 1$

2つの交点 $(-\sqrt{3}, 1)$, $(\sqrt{3}, 1)$ をそれぞれ A, B とすると, $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$
斜線部分を直線 AB に関して上側, 下側の面積をそれぞれ S_1 , S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot 2^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}, \\ S_2 &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(x^2 - 1) \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x + \sqrt{3})(\sqrt{3} - x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} (2\sqrt{3})^3 = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

よって, 求める面積は $S_1 + S_2 = \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) + 2\sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$

(2) α, β は任意の角であるから

$$-x^2 - |y| \leq x^2 \cos \alpha + y \sin \beta \leq x^2 + |y|$$

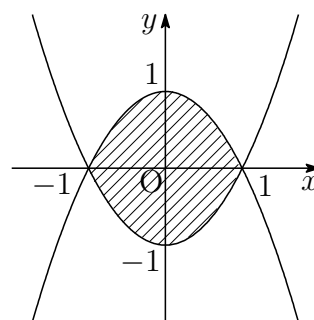
このとき, $-1 \leq x^2 \cos \alpha + y \sin \beta \leq 1$ であるから

$$\begin{cases} -1 \leq -x^2 - |y| \\ x^2 + |y| \leq 1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad |y| \leq 1 - x^2$$

不等式の表す領域は, 右の図の斜線部分で境界線を含む. 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx \\ &= \int_{-1}^1 (x+1)(1-x) dx = \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

よって $S = \frac{8}{3}$

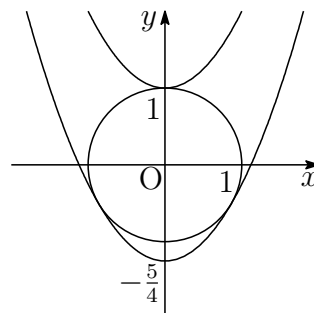


3 $y = x^2 + a$ と $x^2 + y^2 = 1$ から x を消去すると

$$y^2 + y - a - 1 = 0$$

この y に関する方程式が重解をもつとき

$$1^2 - 4 \cdot 1(-a - 1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{5}{4}$$



放物線 $y = x^2 + a$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ と共有点をもつ a の値の範囲は

$$-\frac{5}{4} \leq a \leq 1$$

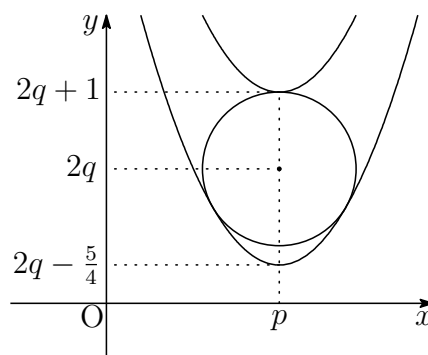
$C: y = x^2 - 2px + q$ を変形すると

$$y = (x - p)^2 + q - p^2$$

放物線 $y = (x - p)^2 + q - p^2$ が中心 $(p, 2q)$

で半径 1 の円と共有点をもつとき

$$\begin{aligned} 2q - \frac{5}{4} &\leq q - p^2 \leq 2q + 1 \\ -\frac{5}{4} &\leq -p^2 - q \leq 1 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$



同様に, C が中心 (p, p) で半径 1 の円と共有点をもつとき

$$p - \frac{5}{4} \leq q - p^2 \leq p + 1 \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{5}{4} \leq -p^2 - p + q \leq 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$C \text{ の頂点 } (x, y) \text{ は } \begin{cases} x = p \\ y = q - p^2 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} p = x \\ q = x^2 + y \end{cases}$$

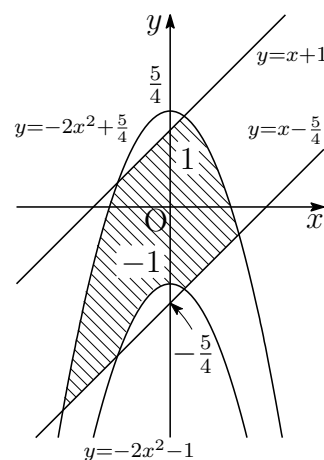
① に (*) を代入すると

$$\begin{aligned} -\frac{5}{4} &\leq -2x^2 - y \leq 1 \\ -1 &\leq 2x^2 + y \leq \frac{5}{4} \end{aligned}$$

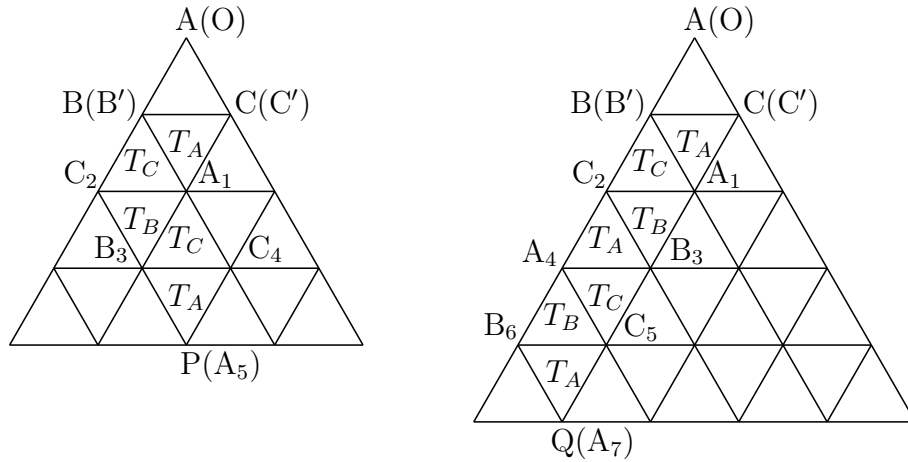
② に (*) を代入すると $-\frac{5}{4} \leq -x + y \leq 1$

$$\text{よって} \quad \begin{cases} -1 \leq 2x^2 + y \leq \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} \leq -x + y \leq 1 \end{cases}$$

領域は右の図の斜線部分で境界線を含む.



- 4 (1) $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とすると $\overrightarrow{OP} = 2(\vec{b} + \vec{c})$, $\overrightarrow{OQ} = 4\vec{b} + \vec{c}$



$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = 2, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{2(\vec{b} + \vec{c}) \cdot (4\vec{b} + \vec{c})}{|2(\vec{b} + \vec{c})||4\vec{b} + \vec{c}|} = \frac{(\vec{b} + \vec{c}) \cdot (4\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}||4\vec{b} + \vec{c}|} \\ &= \frac{4|\vec{b}|^2 + 5\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2}{\sqrt{|\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2} \sqrt{16|\vec{b}|^2 + 8\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2}} \\ &= \frac{4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 2^2}{\sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 + 2^2} \sqrt{16 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 2^2}} \\ &= \frac{30}{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{21}} = \frac{5}{2\sqrt{7}} \end{aligned}$$

- (2) $T_A, T_C, T_B, T_A, T_C, T_B$ の順に操作を行うと, $\triangle ABC$ は $3\vec{b}$ だけ平行移動し, これと順序を逆に行うと, $-3\vec{b}$ だけ平行移動する.

$T_A, T_B, T_C, T_A, T_B, T_C$ の順に操作を行うと, $\triangle ABC$ は $3\vec{c}$ だけ平行移動し, これと順序を逆に行うと, $-3\vec{c}$ だけ平行移動する.

したがって, 整数 k, ℓ に対して, $\overrightarrow{OR} = k(3\vec{b}) + \ell(3\vec{c})$, すなわち,

$$\overrightarrow{OR} = 3k\overrightarrow{OB'} + 3\ell\overrightarrow{OC'}$$

により定められる点 R は, T_A, T_B, T_C の折り返し操作を組み合わせることより, 点 A の移り先になる.

- 5 (1) (i) n 回の試行後に P が到達可能な点は、次の $n+1$ 個

$$(0, n), (1, n-1), (2, n-2), \dots, (n, 0)$$

- (ii) P が点 $(k, n-k)$ に到達する確率 p_k は $(k=0, 1, 2, \dots, n)$

$$p_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{したがって} \quad \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1}$$

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} - 1 = \frac{n-2k-1}{k+1}$$

$$n \text{ が偶数のとき} \quad p_1 < p_2 < \dots < p_{\frac{n}{2}-1} < p_{\frac{n}{2}} > p_{\frac{n}{2}+1} > \dots > p_n$$

$$n \text{ が奇数のとき} \quad p_1 < p_2 < \dots < p_{\frac{n-1}{2}} = p_{\frac{n+1}{2}} > \dots > p_n$$

$$\text{よって } n \text{ が偶数のとき} \quad \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right),$$

$$n \text{ が奇数のとき} \quad \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right), \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$$

- (2) (i) X のカードと Y のカードが出た回数の和が j であるとき $(j=0, 1, \dots, n)$, 到達可能な点の個数が $j+1$ であるから、求める総数は

$$\sum_{j=0}^n (j+1) = \sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

- (ii) X, Y, Z のカードの出た回数がそれぞれ x, y, z である確率を $q(x, y, z)$ とすると $(x+y+z=n)$

$$q(x, y, z) = \frac{n!}{x!y!z!} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$(x, y, z) = (a, b, c)$ のとき、 $q(x, y, z)$ が最大となるとき

$$g(a+1, b-1, c) \leq g(a, b, c), \quad g(a-1, b+1, c) \leq g(a, b, c)$$

であるから

$$\frac{1}{(a+1)!(b-1)!c!} \leq \frac{1}{a!b!c!}, \quad \frac{1}{(a-1)!(b+1)!c!} \leq \frac{1}{a!b!c!}$$

$$\text{ゆえに} \quad b \leq a+1, \quad a \leq b+1 \quad \text{すなわち} \quad -1 \leq a-b \leq 1$$

同様にして $-1 \leq b - c \leq 1, \quad -1 \leq c - a \leq 1$

上の2式から

$$-2 \leq (b - c) + (a - c) \leq 2 \quad \text{ゆえに} \quad -2 \leq n - 3c \leq 2$$

$$\text{したがって} \quad \frac{n-2}{3} \leq c \leq \frac{n+2}{3}$$

n は3の倍数であるから $c = \frac{n}{3}$ 同様にして $a = \frac{n}{3}, \quad b = \frac{n}{3}$

よって, 求める点の座標は $\left(\frac{n}{3}, \frac{n}{3}\right)$