

平成 20 年度 一橋大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
商・経済・法・社会学部 数 I・II・A・B 平成 20 年 2 月 25 日

- 1 k を正の整数とする. $5n^2 - 2kn + 1 < 0$ をみたす整数 n が, ちょうど 1 個であるような k をすべて求めよ.
- 2 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ は異なる 3 つの解 p, q, r をもつ. さらに, $2p^2 - 1, 2q^2 - 1, 2r^2 - 1$ も同じ方程式の異なる 3 つの解である. a, b, c, p, q, r の組をすべて求めよ.
- 3 a を正の実数とする. 点 (x, y) が, 不等式 $x^2 \leq y \leq x$ の定める領域を動くとき, 常に $\frac{1}{2} \leq (x - a)^2 + y \leq 2$ となる. a の値の範囲を求めよ.
- 4 正四面体 OABC の 1 辺の長さを 1 とする. 辺 OA を 2 : 1 に内分する点を P, 辺 OB を 1 : 2 に内分する点を Q とし, $0 < t < 1$ をみたす t に対して, 辺 OC を $t : 1 - t$ に内分する点を R とする.
- (1) PQ の長さを求めよ.
- (2) $\triangle PQR$ の面積が最小となるときの t の値を求めよ.
- 5 n を 3 以上の整数とする. $2n$ 枚のカードがあり, そのうち赤いカードの枚数は 6, 白いカードの枚数は $2n - 6$ である. これら $2n$ 枚のカードを, 箱 A と箱 B に n 枚ずつ無作為に入れる. 2 つの箱の少なくとも一方に赤いカードがちょうど k 枚入っている確率を p_k とする.
- (1) p_2 を n の式で表せ. さらに, p_2 を最大にする n をすべて求めよ.
- (2) $p_1 + p_2 < p_0 + p_3$ をみたす n をすべて求めよ.

解答例

1 $5n^2 - 2kn + 1 < 0 \cdots (*)$ の解が存在するとき、係数について

$$k^2 - 5 \geq 0 \quad k \text{ は正の整数であるから } k \geq 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

このとき、 $(*)$ の解は

$$\frac{k - \sqrt{k^2 - 5}}{5} < x < \frac{k + \sqrt{k^2 - 5}}{5} \quad \cdots (**)$$

$(*)$ をみたす整数 n が、ちょうど 1 個であるとき

$$\frac{k + \sqrt{k^2 - 5}}{5} - \frac{k - \sqrt{k^2 - 5}}{5} \leq 2 \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{k^2 - 5} \leq 5$$

をみたすことが必要である。したがって $k^2 - 5 \leq 25$

$$k^2 \leq 30 \quad k \text{ は正の整数であるから } 1 \leq k \leq 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より, $k = 3, 4, 5$ であるから, $(**)$ より

$$k = 3 \text{ のとき } \frac{1}{5} < n < 1$$

$$k = 4 \text{ のとき } \frac{4 - \sqrt{11}}{5} < n < \frac{4 + \sqrt{11}}{5}$$

$$k = 5 \text{ のとき } \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5} < n < \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}$$

$(*)$ をみたす整数 n が、ちょうど 1 個であるのは $k = 4, 5$

別解 $C: y = 5n^2 + 1$, $l: y = 2\sqrt{5}n$, $l_k: y = 2kn$ とおく.

C と l の接点の n 座標は $\frac{1}{\sqrt{5}}$

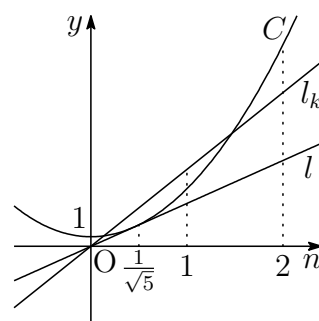
$k > 0$ のとき, $5n^2 + 1 < 2kn$ をみたす整数 n がちょうど 1 個であるとき, $n = 1$ に限るから

$$5 \cdot 1^2 + 1 < 2k \cdot 1 \quad \text{かつ} \quad 5 \cdot 2^2 + 1 \geq 2k \cdot 2$$

を満たせばよいから

$$3 < k \leq \frac{21}{4}$$

よって, 求める正の整数 k は $k = 4, 5$



- 2** 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ は異なる 3 つの解 p, q, r をもち、また、 $2p^2 - 1, 2q - 1, 2r - 1$ もこの 3 次方程式の解であるから

$$\{p, q, r\} = \{2p^2 - 1, 2q - 1, 2r - 1\}$$

したがって、次の 6 つの場合がある.

- (i) $p = 2p^2 - 1, q = 2q - 1, r = 2r - 1$ のとき
第 2 式と第 3 式から、 $q = r = 1$ となり不適.

- (ii) $p = 2p^2 - 1, q = 2r - 1, r = 2q - 1$ のとき
第 2 式と第 3 式から、 $q = r = 1$ となり不適.

- (iii) $q = 2p^2 - 1, p = 2q - 1, r = 2r - 1$ のとき 第 3 式から $r = 1$
第 2 式を第 1 式に代入すると

$$q = 2(2q - 1)^2 - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (q - 1)(8q - 1) = 0$$

$$q \neq r \text{ に注意して } q = \frac{1}{8} \quad \text{ゆえに} \quad p = -\frac{3}{4}$$

- (iv) $r = 2p^2 - 1, p = 2r - 1, q = 2q - 1$ のとき

$$(iii) \text{ の } q \text{ と } r \text{ を交代したものであるから } p = -\frac{3}{4}, q = 1, r = \frac{1}{8}$$

- (v) $q = 2p^2 - 1, r = 2q - 1, p = 2r - 1$ のとき
第 2 式を第 3 式に代入して $p = 4q - 3$
これを第 1 式に代入すると

$$q = 2(4q - 3)^2 - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (q - 1)(32q - 17) = 0$$

$$q = 1 \text{ とすると, } p = q = r = 1 \text{ となり, 不適.}$$

$$\text{ゆえに } q = \frac{17}{32}, r = \frac{1}{16}, p = -\frac{7}{8}$$

- (vi) $r = 2p^2 - 1, q = 2r - 1, p = 2q - 1$ のとき

$$(v) \text{ の } q \text{ と } r \text{ を交代したものであるから } p = -\frac{7}{8}, q = \frac{1}{16}, r = \frac{17}{32}$$

(iii) のとき, 方程式は $\left(x + \frac{3}{4}\right) \left(x - \frac{1}{8}\right) (x - 1) = 0$

すなわち $x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{23}{32}x + \frac{3}{32} = 0$

(iv) のとき, 方程式は $\left(x + \frac{3}{4}\right) (x - 1) \left(x - \frac{1}{8}\right) = 0$

すなわち $x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{23}{32}x + \frac{3}{32} = 0$

(v) のとき, 方程式は $\left(x + \frac{7}{8}\right) \left(x - \frac{17}{32}\right) \left(x - \frac{1}{16}\right) = 0$

すなわち $x^3 + \frac{9}{32}x^2 - \frac{249}{512}x + \frac{119}{4096} = 0$

(vi) のとき, 方程式は $\left(x + \frac{7}{8}\right) \left(x - \frac{1}{16}\right) \left(x - \frac{17}{32}\right) = 0$

すなわち $x^3 + \frac{9}{32}x^2 - \frac{249}{512}x + \frac{119}{4096} = 0$

よって $(a, b, c, p, q, r) = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{23}{32}, \frac{3}{32}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, 1\right),$
 $= \left(-\frac{3}{8}, -\frac{23}{32}, \frac{3}{32}, -\frac{3}{4}, 1, \frac{1}{8}\right),$
 $= \left(\frac{9}{32}, -\frac{249}{512}, \frac{119}{4096}, -\frac{7}{8}, \frac{17}{32}, \frac{1}{16}\right),$
 $= \left(\frac{9}{32}, -\frac{249}{512}, \frac{119}{4096}, -\frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{17}{32}\right)$

3 不等式 $x^2 \leq y \leq x$ の定める領域は、下の図の斜線部分である。

この領域が常に $-(x-a)^2 + \frac{1}{2} \leq y \leq -(x-a)^2 + 2$ を満たすとき ($a > 0$),

a が最小となるのは、放物線 $y = x^2$ と $y = -(x-a)^2 + \frac{1}{2}$ が接するときで

$$x^2 = -(x-a)^2 + \frac{1}{2} \quad \text{整理すると} \quad 2x^2 - 2ax + a^2 - \frac{1}{2} = 0$$

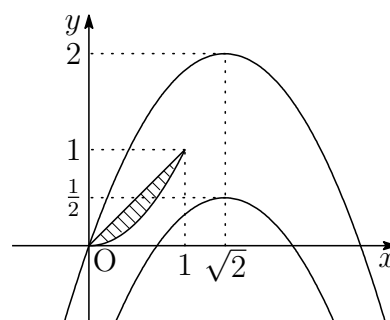
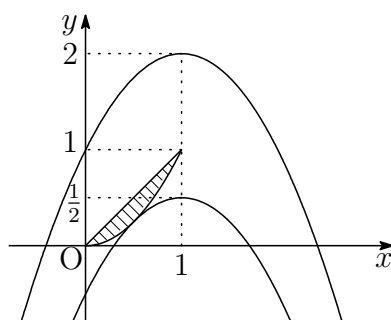
このとき、第2式の係数について

$$(-a)^2 - 2\left(a^2 - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = 1$$

a が最大となるのは、放物線 $y = -(x-a)^2 + 2$ が原点 O を通るときで

$$0 = -a^2 + 2 \quad \text{ゆえに} \quad a = \sqrt{2}$$

よって、求める a の値の範囲は $1 \leq a \leq \sqrt{2}$



□4 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと

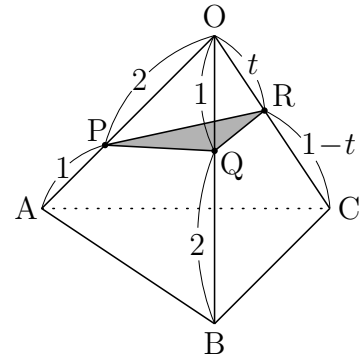
$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= \left| \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} \right|^2 = \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 - \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 \\ &= \frac{1}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad PQ = |\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



(2) $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{PR} = t\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}$ より

$$|\overrightarrow{PR}|^2 = \left| t\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a} \right|^2 = t^2|\vec{c}|^2 - \frac{4}{3}t\vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 = t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{4}{9},$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= \left(\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} \right) \cdot \left(t\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a} \right) = t \left(\frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{2}{3}\vec{c} \cdot \vec{a} \right) - \frac{2}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 \\ &= t \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = -\frac{1}{6}t + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned} \Delta PQR &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3} \left(t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{4}{9} \right) - \left(-\frac{1}{6}t + \frac{1}{3} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{36}t^2 - \frac{1}{9}t + \frac{1}{27}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{36} \left(t - \frac{2}{11} \right)^2 + \frac{8}{297}} \end{aligned}$$

よって, ΔPQR の面積を最小にする t の値は $t = \frac{2}{11}$

- 5 (1) $2n$ 枚のカードを1列に並べて、1番目から n 番目までを箱 A に入れ、 $n+1$ 番目から $2n$ 番目までを箱 B に入れるものとする。

$n = 3$ のとき、6 枚とも赤いカードであるから $p_2 = 0$

$n \geq 4$ のとき、 p_2 を求める。

1 番目から $2n$ 番目までに赤いカード 6 枚の並べ方の総数は ${}_{2n}C_6$ (通り)

1 番目から n 番目までに赤いカードを 2 枚並べ、 $n+1$ 番目から $2n$ 番目までに赤いカード 4 枚並べる場合の数は

$${}_nC_2 \cdot {}_nC_4 \quad (\text{通り})$$

1 番目から n 番目までに赤いカードを 4 枚並べ、 $n+1$ 番目から $2n$ 番目までに赤いカード 2 枚並べる場合の数もこれと等しいから

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{{}_nC_2 \cdot {}_nC_4 \times 2}{{}_{2n}C_6} \\ &= \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \times 2 \\ &\quad \times \frac{6!}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)} \\ &= \frac{15n(n-1)(n-3)}{4(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \end{aligned}$$

上式は、 $n = 3$ のときも成立するから、 $n \geq 3$ について

$$p_2 = \frac{15n(n-1)(n-3)}{4(2n-1)(2n-3)(2n-5)}$$

ここで、 $P_2(n) = p_2$ とすると ($n \geq 4$)

$$\begin{aligned} \frac{P_2(n+1)}{P_2(n)} &= \frac{15(n+1)n(n-2)}{4(2n+1)(2n-1)(2n-3)} \times \frac{4(2n-1)(2n-3)(2n-5)}{15n(n-1)(n-3)} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)(2n-5)}{(n-1)(n-3)(2n+1)} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{P_2(n+1)}{P_2(n)} - 1 &= \frac{(n+1)(n-2)(2n-5) - (n-1)(n-3)(2n+1)}{(n-1)(n-3)(2n+1)} \\ &= \frac{7-n}{(n-1)(n-3)(2n+1)} \end{aligned}$$

したがって $P_2(4) < P_2(5) < P_2(6) < P_2(7) = P_2(8) > P_2(9) > P_2(10) \dots$

よって、 p_2 を最大にする n は $n = 7, 8$

(2) (1) と同様にして

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{{}_nC_1 \cdot {}_nC_5 \times 2}{2n C_6}, & p_2 &= \frac{{}_nC_2 \cdot {}_nC_4 \times 2}{2n C_6}, \\ p_0 &= \frac{{}_nC_0 \cdot {}_nC_6 \times 2}{2n C_6}, & p_3 &= \frac{({}_nC_3)^2}{2n C_6} \end{aligned}$$

これらを $p_1 + p_2 < p_0 + p_3$ に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{{}_nC_1 \cdot {}_nC_5 \times 2}{2n C_6} + \frac{{}_nC_2 \cdot {}_nC_4 \times 2}{2n C_6} &< \frac{{}_nC_0 \cdot {}_nC_6 \times 2}{2n C_6} + \frac{({}_nC_3)^2}{2n C_6} \\ {}_nC_1 \cdot {}_nC_5 \times 2 + {}_nC_2 \cdot {}_nC_4 \times 2 &< {}_nC_0 \cdot {}_nC_6 \times 2 + ({}_nC_3)^2 \\ \frac{2n^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} + \frac{2n^2(n-1)^2(n-2)(n-3)}{2!4!} \\ &< \frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!} + \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{(3!)^2} \\ 6n(n-3)(n-4) + 15n(n-1)(n-3) \\ &< (n-3)(n-4)(n-5) + 10n(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

これを整理すると

$$\begin{aligned} n^3 - 6n^2 + 5n + 6 &< 0 \\ (n-2)(n^2 - 4n - 3) &< 0 \\ (n-2)(n-2+\sqrt{7})(n-2-\sqrt{7}) &< 0 \end{aligned}$$

$n \geq 3$ に注意してこれを解くと $3 \leq n < 2 + \sqrt{7}$

よって, これを満たす 3 以上の整数 n は $\mathbf{n = 3, 4}$