

平成 19 年度 一橋大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分
 商・経済・法・社会学部 数 I・II・A・B 平成 19 年 2 月 25 日

1 m を整数とし, $f(x) = x^3 + 8x^2 + mx + 60$ とする.

(1) 整数 a と, 0 ではない整数 b で, $f(a + bi) = 0$ をみたすものが存在するよ
 うな m をすべて求めよ. ただし, i は虚数単位である.

(2) (1) で求めたすべての m に対して, 方程式 $f(x) = 0$ を解け.

2 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4a_n$$

$$b_1 = 3, \quad b_{n+1} = b_n + 2a_n$$

$$c_1 = 4, \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{4} + a_n + b_n$$

と順に定める. 放物線 $y = a_n x^2 + 2b_n x + c_n$ を H_n とする.

(1) H_n は x 軸と 2 点で交わることを示せ.

(2) H_n と x 軸の交点を P_n , Q_n とする. $\sum_{k=1}^n P_k Q_k$ を求めよ.

3 放物線 $y = ax^2 + bx$ ($a > 0$) を C とする. C 上に異なる 2 点 P , Q をとり, そ
 の x 座標をそれぞれ p , q ($0 < p < q$) とする.

(1) 線分 OQ と C で囲まれた部分の面積が, $\triangle OPQ$ の面積の $\frac{3}{2}$ 倍であるとき,
 p と q の関係を求めよ. ただし, O は原点を表す.

(2) Q を固定して P を動かす. $\triangle OPQ$ の面積が最大となるときの p を q で表
 せ. また, そのときの $\triangle OPQ$ の面積と, 線分 OQ と C で囲まれた部分の
 面積との比を求めよ.

4 a を定数とし, $f(x) = x^3 - 3ax^2 + a$ とする. $x \leq 2$ の範囲で $f(x)$ の最大値が
 105 となるような a をすべて求めよ.

5 1 が書かれたカードが 1 枚, 2 が書かれたカードが 1 枚, $\dots$, n が書かれたカードが 1 枚の全部で n 枚のカードからなる組がある. この組から 1 枚を抜き出し元にもどす操作を 3 回行う. 抜き出したカードに書かれた数を a, b, c とするとき, 得点 X を次の規則 (i), (ii) に従って定める.

(i) a, b, c がすべて異なるとき, X は a, b, c のうちの最大でも最小でもない値とする.

(ii) a, b, c のうちに重複しているものがあるとき, X はその重複した値とする.

$1 \leq k \leq n$ をみたす k に対して, $X = k$ となる確率を p_k とする.

(1) p_k を n と k で表せ.

(2) p_k が最大となる k を n で表せ.

解答例

- 1 (1) $f(x)$ は実数を係数とする多項式で, $f(a+bi) = 0$ をみたすとき ($b \neq 0$), 3 次方程式 $f(x) = 0$ の 3 つの解を

$$a+bi, \quad a-bi, \quad c \quad (c \text{ は実数})$$

とすると, 3 次方程式 $x^3 + 8x^2 + mx + 60 = 0$ の解と係数の関係により

$$\begin{aligned} (a+bi) + (a-bi) + c &= -8, \\ (a+bi)(a-bi) + (a+bi)c + (a-bi)c &= m, \\ (a+bi)(a-bi)c &= -10 \end{aligned}$$

これらをそれぞれ整理すると

$$(*) \quad c = -2(a+4), \quad a^2 + b^2 + 2ac = m, \quad (a^2 + b^2)c = -60$$

(*) の第 1 式を第 3 式に代入することにより

$$(a+4)(a^2 + b^2) = 30 \quad \text{ゆえに} \quad b^2 = \frac{30}{a+4} - a^2 \quad \cdots (**)$$

a, b は整数より ($b \neq 0$), $a+4$ は 30 の正の約数であるから

$$a+4 = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$$

このとき, $a^2 + b^2$ も 30 の正の約数であるから, $|a| \leq 5$ であることに注意すると, a のとり得る値は

$$a = -3, -2, -1, 1, 2$$

したがって, (**) より

a	-3	-2	-1	1	2
b^2	21	11	9	5	1

b^2 は平方数であるから $a = -1, 2$

これと (*) の第 1 式より

$$(a, |b|, c) = (-1, 3, -6), (2, 1, -12)$$

(*) の第 2 式から $m = a^2 + b^2 + 2ac = \mathbf{22, -43}$

- (2) (1) の結果から $m = \mathbf{22}$ のとき $\mathbf{-1 \pm 3i, -6}$
 $m = \mathbf{-43}$ のとき $\mathbf{2 \pm i, -12}$

- 2** (1) 放物線 $H_n : y = a_n x^2 + 2b_n x + c_n$ の係数について

$$D_n = b_n^2 - a_n c_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおくと、与えられた漸化式により

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= b_{n+1}^2 - a_{n+1} c_{n+1} \\ &= (b_n + 2a_n)^2 - 4a_n \left(\frac{c_n}{4} + a_n + b_n \right) \\ &= b_n^2 - a_n c_n = D_n \end{aligned}$$

$D_1 = b_1^2 - a_1 c_1 = 3^2 - 2 \cdot 4 = 1$ であるから、上式より

$$D_n = 1 > 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

よって、放物線 H_n は x 軸と 2 点で交わる.

- (2) 2 次方程式 $a_n x^2 + 2b_n x + c_n = 0$ の 2 解を α_n, β_n とすると、解と係数の関係により

$$\alpha_n + \beta_n = -\frac{2b_n}{a_n}, \quad \alpha_n \beta_n = \frac{c_n}{a_n}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned} (\beta_n - \alpha_n)^2 &= (\alpha_n + \beta_n)^2 - 4\alpha_n \beta_n = \left(-\frac{2b_n}{a_n} \right)^2 - \frac{4c_n}{a_n} \\ &= \frac{4}{a_n^2} (b_n^2 - a_n c_n) = \frac{4}{a_n^2} D_n = \frac{4}{a_n^2} \end{aligned}$$

数列 $\{a_n\}$ は初項 2, 公比 4 の等比数列であるから $a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$

$$\text{ゆえに } P_n Q_n = |\beta_n - \alpha_n| = \frac{2}{|a_n|} = \frac{2}{2 \cdot 4^{n-1}} = \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

$$\text{よって } \sum_{k=1}^n P_k Q_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)$$

- 3 (1) 2点 $O, Q(q, aq^2 + bq)$ を通る直線は ($q \neq 0$)

$$y = \frac{aq^2 + bq}{q}x \quad \text{すなわち} \quad y = (aq + b)x$$

線分 OQ と C で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^q \{(aq + b)x - (ax^2 + bx)\} dx \\ &= a \int_0^q x(q - x) dx = \frac{aq^3}{6} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{OP} = (p, ap^2 + bp)$, $\overrightarrow{OQ} = (q, aq^2 + bq)$ であるから, $\triangle OPQ$ の面積を S_2 とすると ($a > 0, 0 < p < q$)

$$S_2 = \frac{1}{2} |p(aq^2 + bq) - q(ap^2 + bp)| = \frac{1}{2} |apq(q - p)| = \frac{1}{2} apq(q - p)$$

条件より, $S_1 = \frac{3}{2} S_2$ であるから ($a > 0, q \neq 0$)

$$\frac{1}{6} aq^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} apq(q - p) \quad \text{整理すると} \quad 9p^2 - 9pq + 2q^2 = 0$$

ゆえに $(3p - q)(3p - 2q) = 0$ $0 < p < q$ に注意して $p = \frac{q}{3}, p = \frac{2q}{3}$

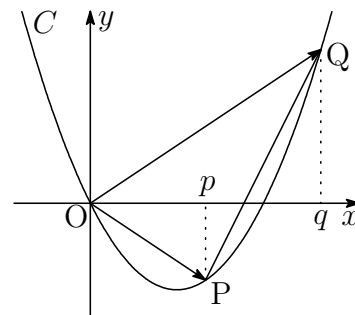
- (2) q は定数であるから, $\triangle OPQ$ の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2} pq(q - p) = -\frac{aq}{2} (p^2 - qp) = -\frac{aq}{2} \left(p - \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{aq^3}{8}$$

したがって, $\triangle OPQ$ の面積は, $p = \frac{q}{2}$ のとき, 最大値 $\frac{aq^3}{8}$ をとる.

求める面積比は, これと S_1 から

$$\frac{aq^3}{8} : \frac{aq^3}{6} = 3 : 4$$



4 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + a$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$$

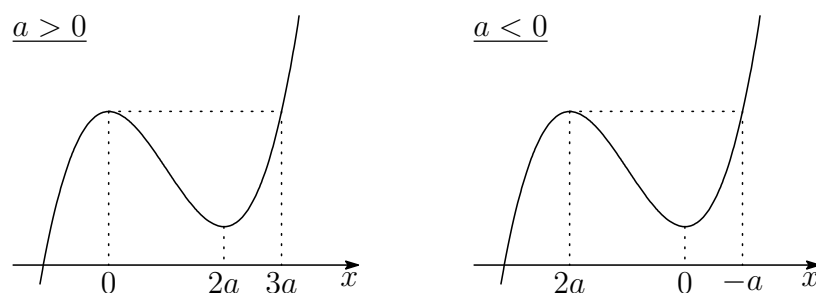
$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, 2a$$

$$\text{方程式 } f(x) = f(0) \text{ は } x^3 - 3ax^2 + a = a$$

$$\text{整理すると } x^2(x - 3a) = 0 \quad \text{これを解いて } x = 0, 3a$$

$$\text{方程式 } f(x) = f(2a) \text{ は } x^3 - 3ax^2 + a = -4a^3 + a$$

$$\text{整理すると } (x - 2a)^2(x + a) = 0 \quad \text{これを解いて } x = 2a, -a$$



(i) $a > 0$ のとき

$$\begin{cases} 2 < 3a \\ f(0) = 105 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} 3a < 2 \\ f(2) = 105 \end{cases}$$

$$\text{すなわち} \quad \begin{cases} a > \frac{2}{3} \\ a = 105 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a < \frac{2}{3} \\ 8 - 11a = 105 \quad (a = -\frac{97}{11}) \end{cases}$$

$$a > 0 \text{ であることに注意して } a = 105$$

(ii) $a < 0$ のとき

$$\begin{cases} 2 < -a \\ f(2a) = 105 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} -a < 2 \\ f(2) = 105 \end{cases}$$

$$\text{すなわち} \quad \begin{cases} a < -2 \\ -4a^3 + a = 105 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a > -2 \\ 8 - 11a = 105 \quad (a = -\frac{97}{11}) \end{cases}$$

$$-4a^3 + a = 105 \text{ について } (a + 3)(4a^2 - 12a + 35) = 0$$

$$\text{したがって } (a + 3)\{(2a - 3)^2 + 26\} = 0 \quad \text{すなわち } a = -3$$

$$a < 0 \text{ であることに注意して } a = -3$$

(iii) $a = 0$ のとき, $f(x) = x^3$ となり, $x \leq 2$ における最大値 $f(2) = 8$ は不適.

$$\text{よって } a = 105, -3$$

5 (1) カードを 3 回抜き出す場合の総数は n^3 (通り)

(i) a, b, c がすべて異なり, $X = k$ となるとき ($k = 2, 3, \dots, n-1$)

最小のカードは $1, 2, \dots, k-1$

最大のカードは $k+1, k+2, \dots, n$

これらの場合の数は

$$(k-1)(n-k)3! = 6(k-1)(n-k) \quad (\text{通り})$$

この確率は $\frac{6(k-1)(n-k)}{n^3}$

$k=1, n$ のときは, その確率は 0 であるから, このときの確率は

$$\frac{6(k-1)(n-k)}{n^3} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

(ii) a, b, c のうちに 2 つが重複するとき, $X = k$ となるのは

$$(n-1) \cdot {}_3C_1 = 3(n-1) \quad \text{通り}$$

a, b, c の 3 つとも重複し, $X = k$ となるのは 1 通り

このときの確率は

$$\frac{3(n-1)+1}{n^3} = \frac{3n-2}{n^3} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

(i), (ii) より

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{6(k-1)(n-k)}{n^3} + \frac{3n-2}{n^3} \\ &= \frac{-6k^2 + 6(n+1)k - 3n - 2}{n^3} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$p_k = -\frac{6}{n^3} \left(k - \frac{n+1}{2} \right)^2 + \frac{3n^2-1}{2n^3}$$

よって n が奇数のとき $k = \frac{n+1}{2}$

n が偶数のとき $k = \frac{n}{2}, \frac{n+2}{2}$