

平成18年度 一橋大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
 商・経済・法・社会学部 数I・II・A・B 平成18年2月25日

- 1 次の条件 (a), (b) をともにみたす直角三角形を考える. ただし, 斜辺の長さを p , その他の2辺の長さを q, r とする.
- (a) p, q, r は自然数で, そのうちの少なくとも2つは素数である.
 (b) $p + q + r = 132$
- (1) q, r のどちらかは偶数であることを示せ.
 (2) p, q, r の組をすべて求めよ.
- 2 座標平面上に1辺の長さが2の正三角形ABCがある. ただし, $\triangle ABC$ の重心は原点の位置にあり, 辺BCは x 軸と平行である. また, 頂点Aは y 軸上にあつて y 座標は正であり, 頂点Cの x 座標は正である. 直線 $y = x$ に関して3点A, B, Cと対称な点を, それぞれ A', B', C' とする.
- (1) C' の座標を求めよ.
 (2) $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ が重なる部分の面積を求めよ.
- 3 大きさがそれぞれ5, 3, 1の平面上のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対して, $\vec{z} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ とおく.
- (1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を動かすとき, $|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ.
 (2) $\vec{a}$ を固定し, $\vec{a} \cdot \vec{z} = 20$ をみたすように $\vec{b}, \vec{c}$ を動かすとき, $|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ.
- 4 a, b を正の定数とする. 関数 $y = x^3 - ax$ のグラフと, 点 $(0, 2b^3)$ を通る直線はちょうど2点P, Qを共有している. ただし, Pの x 座標は負, Qの x 座標は正である.
- (1) 直線PQの方程式を a と b で表せ.
 (2) PおよびQの座標を a と b で表せ.
 (3) $\angle POQ = 90^\circ$ となる b が存在するような a の値の範囲を求めよ. ただし, Oは原点である.
- 5 1, 2, 3, 4が1つずつ記された4枚のカードがある. これらのカードから1枚を抜き出し元に戻すという試行を n 回繰り返す. 抜き出した n 個の数の和を X_n とし, 積を Y_n とする.
- (1) $X_n \leq n + 3$ となる確率を n で表せ.
 (2) Y_n が8で割り切れる確率を n で表せ.

解答例

- 1 (1) 条件 (b) および, 直角三角形において p が斜線の長さ, q, r が他の 2 辺の長さであることから, 三平方の定理により

$$\begin{cases} p + q + r = 132 & \cdots \textcircled{1} \\ p^2 = q^2 + r^2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

q, r がともに奇数であると仮定すると, ① より, p は偶数であるから

$$q \equiv \pm 1, \quad r \equiv \pm 1, \quad p \equiv 0, 2 \pmod{4}$$

$$\text{とおくと } q^2 \equiv r^2 \equiv 1, \quad p^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

このとき, $q^2 + r^2 \equiv 2 \not\equiv p^2 \pmod{4}$ であるから, ② に反するので不合理.

- (2) (1) の結論から, r が偶数のとき, $r = 2$ とすると, ①, ② より

$$p + q = 130, \quad (p + q)(p - q) = 4 \quad \text{ゆえに} \quad 130(p - q) = 4$$

これを満たす自然数 p, q は存在しないから, 偶数 r は $r \geq 4$

このとき, p, q は素数である. ② から

$$(p + r)(p - r) = q^2$$

$p + r > p - r > 0$ であるから

$$p + r = q^2, \quad p - r = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p = \frac{q^2 + 1}{2}, \quad r = \frac{q^2 - 1}{2} \quad \cdots (*)$$

$$\text{これを ① に代入すると } \frac{q^2 + 1}{2} + q + \frac{q^2 - 1}{2} = 132$$

$$\text{整理すると } q^2 + q - 132 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (q + 12)(q - 11) = 0$$

$$q > 0 \text{ であるから } q = 11 \quad \text{これを } (*) \text{ に代入して } p = 61, \quad r = 60$$

$$r \text{ が偶数であることに注意して } (p, q, r) = (61, 11, 60)$$

$$q \text{ が偶数のときも同様にして } (p, q, r) = (61, 60, 11)$$

$$\text{よって } (p, q, r) = (61, 11, 60), (61, 60, 11)$$

- 2 (1) $\triangle ABC$ の外接円の半径を r とすると、
正弦定理により

$$\frac{2}{\sin 60^\circ} = 2r \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

直線 OC の偏角が $-\frac{\pi}{6}$ であるから、 OC' の偏角を θ とすると

$$\frac{\theta + (-\frac{\pi}{6})}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$$

したがって、点 C' の座標は

$$\left(r \cos \frac{2\pi}{3}, r \sin \frac{2\pi}{3} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1 \right)$$

- (2) 直線 $B'C' : x = -\frac{r}{2}$ と直線 $AB : y = \sqrt{3}x + r$ の交点を P_1 とすると

$$P_1 \left(-\frac{r}{2}, \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) r \right)$$

直線 BC と直線 $B'C'$ の交点を Q_1 とすると、 Q_1 は $y = x$ 上にあるから

$$Q_1 \left(-\frac{r}{2}, -\frac{r}{2} \right)$$

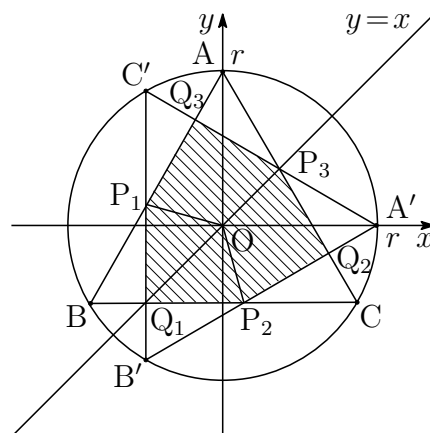
求める面積は、上の図の六角形 $P_1Q_1P_2Q_2P_3Q_3$ である。3つの四角形 $OP_1Q_1P_2$, $OP_2Q_2P_3$, $OP_3Q_3P_1$ は合同であり、 $OP_1Q_1P_2 = 2\triangle OP_1Q_1$ であるから

$$\begin{aligned} 3 \times 2\triangle OP_1Q_1 &= 6 \times \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) r - \left(-\frac{r}{2} \right) \right\} \cdot \frac{r}{2} \\ &= \frac{3}{4} (3 - \sqrt{3}) r^2 = \frac{3}{4} (3 - \sqrt{3}) \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \\ &= 3 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{別解} \quad \triangle BP_1Q_1 = \frac{1}{2} BQ_1 \cdot P_1Q_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) r \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) r = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{よって} \quad \triangle ABC - 3\triangle BP_1Q_1 = \sqrt{3} - 3 \cdot \frac{2\sqrt{3} - 3}{3} = 3 - \sqrt{3}$$



3 (1) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 1$ より, $|\vec{b}| - |\vec{c}| \leq |\vec{b} + \vec{c}| \leq |\vec{b}| + |\vec{c}|$ であるから

$$2 \leq |\vec{b} + \vec{c}| \leq 4 \quad \cdots (*)$$

$|\vec{a}| > |\vec{b} + \vec{c}|$ より, $|\vec{a}| - |\vec{b} + \vec{c}| \leq |\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})| \leq |\vec{a}| + |\vec{b} + \vec{c}|$ であるから

$$1 \leq |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \leq 9 \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leq |\vec{z}| \leq 9$$

$\vec{a} = -5\vec{c}, \vec{b} = 3\vec{c}$ のとき, $|\vec{z}| = 1, \quad \vec{a} = 5\vec{c}, \vec{b} = 3\vec{c}$ のとき, $|\vec{z}| = 9$

よって, $|\vec{z}|$ は, 最大値 **9**, 最小値 **1** をとる.

(2) $\vec{a} \cdot \vec{z} = 20$ より, $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 20$ であるから

$$|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 20 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = -5$$

$\vec{a}$ と $\vec{b} + \vec{c}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| |\vec{b} + \vec{c}| \cos \theta = -5 \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{b} + \vec{c}| \cos \theta = -1$$

(*) より, 上式を満たす θ が存在する. したがって

$$\begin{aligned} |\vec{z}|^2 &= |\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + |\vec{b} + \vec{c}|^2 \\ &= 5^2 + 2 \cdot (-5) + |\vec{b} + \vec{c}|^2 \\ &= 15 + |\vec{b} + \vec{c}|^2 \end{aligned}$$

(*) より $15 + 2^2 \leq |\vec{z}|^2 \leq 15 + 4^2$ したがって $\sqrt{19} \leq |\vec{z}| \leq \sqrt{31}$

よって, $|\vec{z}|$ は, 最大値 **$\sqrt{31}$** , 最小値 **$\sqrt{19}$** をとる.

- 4** (1) $y = x^3 - ax$ より, $y' = 3x^2 - a$ であるから, 曲線 $y = x^3 - ax$ 上の点 $(t, t^3 - at)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - at) = (3t^2 - a)(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y = (3t^2 - a)x - 2t^3$$

これが点 $(0, 2b^3)$ を通るから

$$-2t^3 = 2b^3 \quad \text{これを解いて} \quad t = -b$$

したがって, 直線 PQ の方程式は $y = (2b^2 - a)x + 2b^3$

- (2) 曲線 $y = x^3 - ax$ および直線 PQ の方程式から, y を消去すると

$$x^3 - ax = (2b^2 - a)x + 2b^3 \quad \text{ゆえに} \quad (x + b)^2(x - 2b) = 0$$

条件から $P(-b, ab - b^3), Q(2b, -2ab + 8b^3)$

- (3) $\angle POQ = 90^\circ$ であるから, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ であるから

$$-2b^2 + (ab - 2b^2)(-2ab + 8b^3) = 0$$

$$b \neq 0 \text{ より} \quad 4b^4 - 5ab^2 + 1 + a^2 = 0$$

$s = b^2$ とおくと, s に関する 2 次方程式 $4s^2 - 5as + 1 + a^2 = 0$ が正の解をもつ条件は

$$\frac{5a}{4} > 0, \quad (-5a)^2 - 4 \cdot 4(1 + a^2) \geq 0$$

$$\text{上の 2 式から} \quad a > 0, \quad (3a + 4)(3a - 4) \geq 0 \quad \text{よって} \quad a \geq \frac{4}{3}$$

5 (1) $X_n = n$ であるのは, n 回とも 1 を抜き出す確率であるから

$$P(X_n = n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}$$

$X_n = n + 1$ であるのは, n 回のうち, 1 を $n - 1$ 回, 2 を 1 回抜き出す確率であるから

$$P(X_n = n + 1) = \frac{n!}{(n-1)!1!} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{4} = \frac{n}{4^n}$$

$X_n = n + 2$ となるのは, 次の場合である.

- n 回のうち, 1 を $n - 1$ 回, 3 を 1 回抜き出す
- n 回のうち, 1 を $n - 2$ 回, 2 を 2 回抜き出す

したがって

$$\begin{aligned} P(X = n + 2) &= \frac{n!}{(n-1)!1!} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{4} + \frac{n!}{(n-2)!2!} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{n(n+1)}{2 \cdot 4^n} \end{aligned}$$

$X_n = n + 3$ となるのは, 次の場合である.

- n 回のうち, 1 を $n - 1$ 回, 4 を 1 回抜き出す
- n 回のうち, 1 を $n - 2$ 回, 2 を 1 回, 3 を 1 回抜き出す
- n 回のうち, 1 を $n - 3$ 回, 2 を 3 回抜き出す

したがって

$$\begin{aligned} P(X = n + 3) &= \frac{n!}{(n-1)!1!} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{4} + \frac{n!}{(n-2)!1!1!} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \\ &\quad + \frac{n!}{(n-3)!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6 \cdot 4^n} \end{aligned}$$

よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} P(X_n \leq n + 3) &= P(X_n = n) + P(X_n = n + 1) \\ &\quad + P(X_n = n + 2) + P(X_n = n + 3) \\ &= \frac{1}{4^n} + \frac{n}{4^n} + \frac{n(n+1)}{2 \cdot 4^n} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6 \cdot 4^n} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6 \cdot 4^n} \end{aligned}$$

- (2) $X = \{1, 3\}$ とする. Y_n が 2 で割り切れない場合は, n 回とも X を抜き出す場合で, その確率を P_A とすると

$$P_A = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

Y_n が 2 で割り切れるが, 4 で割り切れない場合は, n 回のうち, $n-1$ 回 X を抜き出し, 2 を 1 回抜き出す場合で, その確率を P_B とすると

$$P_B = \frac{n!}{(n-1)!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{4} = \frac{n}{2^{n+1}}$$

Y_n が 4 で割り切れるが, 8 で割り切れないのは, 次の場合である.

- n 回のうち, $n-1$ 回 X を抜き出し, 4 を 1 回抜き出す
- n 回のうち, $n-2$ 回 X を抜き出し, 2 を 2 回抜き出す

したがって, その確率を P_C とすると

$$P_C = \frac{n!}{(n-1)!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{4} + \frac{n!}{(n-2)!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{n(n+3)}{2^{n+3}}$$

よって, 求める確率は

$$1 - (P_A + P_B + P_C) = 1 - \frac{n^2 + 7n + 8}{2^{n+3}}$$