

平成17年度 一橋大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
商・経済・法・社会学部 数I・II・A・B 平成17年2月25日

- 1 k は整数であり, 3 次方程式

$$x^3 - 13x + k = 0$$

は 3 つの異なる整数解をもつ. k とこれらの整数解をすべて求めよ.

- 2 原点を中心とする半径 1 の円を C とし, $0 < a < 1$, $b > 0$ とする. $A(a, 0)$ と $N(0, 1)$ を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを P とおく. また, $B(b, 0)$ と N を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを Q とおく.

- (1) P の座標を a で表せ.
- (2) $AQ \parallel PB$ のとき, $AN \cdot BN = 2$ となることを示せ.
- (3) $AQ \parallel PB$, $\angle ANB = 45^\circ$ のとき, a の値を求めよ.

- 3 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ をみたす θ と正の整数 m に対して, $f_m(\theta)$ を次のように定める.

$$f_m(\theta) = \sum_{k=0}^m \sin(\theta + 60^\circ \times k)$$

- (1) $f_5(\theta)$ を求めよ.
- (2) θ が $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲を動くとき, $f_4(\theta)$ の最大値を求めよ.
- (3) m がすべての正の整数を動き, θ が $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲を動くとき, $f_m(\theta)$ の最大値を求めよ.

- 4 a を定数とし, x の 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定める.

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$g(x) = -2(x - a)^2 + \frac{a^2}{3}$$

- (1) 2 つの放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が 2 つの共有点をもつような a の範囲を求めよ.
- (2) (1) で求めた範囲に属する a に対して, 2 つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする. C_a の面積を a で表せ.
- (3) a が (1) で求めた範囲を動くとき, 少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ.

5 A と B の 2 人があるゲームを繰り返し行う．1 回ごとのゲームで A が B に勝つ確率は p ，B が A に勝つ確率は $1 - p$ であるとする． n 回目のゲームで初めて A と B の双方が 4 勝以上になる確率を x_n とする．

(1) x_n を p と n で表せ．

(2) $p = \frac{1}{2}$ のとき， x_n を最大にする n を求めよ．

解答例

- 1** 3次方程式 $x^3 - 13x + k = 0$ の3つの整数解を α, β, γ とすると $(\alpha \leq \beta \leq \gamma)$, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -13, \quad \alpha\beta\gamma = -k \quad (*)$$

上の第1式と第2式から

$$\gamma = -(\alpha + \beta), \quad \alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) + 13 = 0$$

上の2式から γ を消去すると

$$\alpha\beta - (\alpha + \beta)^2 + 13 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2\alpha + \beta)^2 = 52 - 3\beta^2 \quad (**)$$

上の第2式の左辺は平方数であるから $\beta^2 = 1, 9, 16$

(i) $\beta^2 = 1$ のとき, $(**)$ より $|2\alpha + \beta| = 7$

$\alpha \leq \beta$ に注意して解くと $(\alpha, \beta) = (-4, 1), (-3, -1)$

(ii) $\beta^2 = 9$ のとき, $(**)$ より $|2\alpha + \beta| = 5$

$\alpha \leq \beta$ に注意して解くと $(\alpha, \beta) = (-4, 3)$

(iii) $\beta^2 = 16$ のとき, $(**)$ より $|2\alpha + \beta| = 2$

$\alpha \leq \beta$ に注意して解くと $(\alpha, \beta) = (-1, 4)$

(i)~(iii) を $\gamma = -(\alpha + \beta)$ に代入したもので, $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ を満たすものは

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (-4, 1, 3), (-3, -1, 4)$$

これと $(*)$ の第3式から

$k = 12$ のとき 解は $-4, 1, 3$

$k = -12$ のとき 解は $-3, -1, 4$

- 2 (1) $C: x^2 + y^2 = 1$, 直線 $AN: \frac{x}{a} + y = 1$

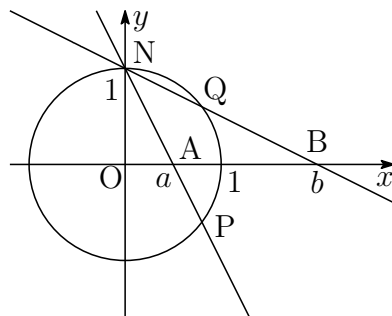
上の2式から, Pの x 座標は

$$x^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 = 1$$

$$\text{ゆえに } x\{(a^2 + 1)x - 2a\} = 0$$

$$x \neq 0 \text{ であるから } x = \frac{2a}{a^2 + 1}$$

$$\text{これを直線 AN の方程式にして } P\left(\frac{2a}{a^2 + 1}, \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\right)$$



- (2) (1)の結果を利用して $Q\left(\frac{2b}{b^2 + 1}, \frac{b^2 - 1}{b^2 + 1}\right)$

$$AQ \parallel PB \text{ より } NA : NP = NQ : NB$$

したがって A, Q, P, B の x 座標から

$$a : \frac{2a}{a^2 + 1} = \frac{2b}{b^2 + 1} : b \quad \text{ゆえに} \quad (a^2 + 1)(b^2 + 1) = 4 \quad (*)$$

$$\text{また } AN = \sqrt{a^2 + 1}, \quad BN = \sqrt{b^2 + 1}$$

$$\text{よって } AN \cdot BN = \sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} = 2$$

- (3) $\alpha = \angle ONA$, $\beta = \angle ONB$ とおくと $\tan \alpha = a$, $\tan \beta = b$

$\angle ANB = \beta - \alpha = 45^\circ$ であるから

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{b - a}{1 + ba} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{1 + a}{1 - a}$$

$$\text{これを } (*) \text{ に代入すると } (a^2 + 1) \left\{ \left(\frac{1 + a}{1 - a} \right)^2 + 1 \right\} = 4$$

$$\text{ゆえに } (a^2 + 1) \cdot \frac{2(a^2 + 1)}{(1 - a)^2} = 4 \quad 0 < a < 1 \text{ より } \frac{a^2 + 1}{1 - a} = \sqrt{2}$$

$$\text{したがって } a^2 + \sqrt{2}a + 1 - \sqrt{2} = 0$$

$$0 < a < 1 \text{ に注意して解くと } a = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$$

- 3** (1) $\alpha = 30^\circ$, $\theta_k = \theta + 2k\alpha$ とおくと ($k = 0, 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned}
 f_m(\theta) &= \sum_{k=0}^m \sin \theta_k = \sum_{k=0}^m 2 \sin \theta_k \sin \alpha \\
 &= \sum_{k=0}^m \{\cos(\theta_k - \alpha) - \cos(\theta_k + \alpha)\} \\
 &= \sum_{k=0}^m \{\cos(\theta_k - \alpha) - \cos(\theta_{k+1} - \alpha)\} \\
 &= \cos(\theta_0 - \alpha) - \cos(\theta_{m+1} - \alpha) \\
 &= 2 \sin \frac{\theta_{m+1} + \theta_0 - 2\alpha}{2} \sin \frac{\theta_{m+1} - \theta_0}{2} \\
 &= 2 \sin(\theta + m\alpha) \sin(m+1)\alpha
 \end{aligned} \tag{*}$$

$m = 5$ のとき, $\sin(m+1)\alpha = 0$ であるから, (*) より $f_5(\theta) = 0$

別解 $g(k) = \sin(\theta + 60^\circ \times k)$ とおくと

$$g(3) = -g(0), \quad g(4) = -g(1), \quad g(5) = -g(2)$$

$$\text{よって} \quad f_5(\theta) = \sum_{k=0}^5 g(k) = 0$$

- (2) (*) に $m = 4$ を代入すると

$$\begin{aligned}
 f_4(\theta) &= 2 \sin(\theta + 4\alpha) \sin 5\alpha \\
 &= 2 \sin(\theta + 120^\circ) \sin 150^\circ \\
 &= \sin(\theta - 240^\circ)
 \end{aligned}$$

$\theta - 240^\circ = 90^\circ$, すなわち, $\theta = 330^\circ$ のとき, 最大値 **1** をとる.

- (3) (*) より, $(m+1)\alpha = 3\alpha + 12n\alpha$ (n は 0 以上の整数),
すなわち, $m = 2 + 12n$ のとき

$$f_m(\theta) = 2 \sin\{\theta + (2 + 12n)\alpha\} = 2 \sin(\theta + 60^\circ)$$

であるから, $\theta = 30^\circ$ のとき, 最大値 **2** をとる.

4 (1) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ から y を消去すると

$$x^2 - 3 = -2(x - a)^2 + \frac{a^2}{3} \quad \text{整理すると} \quad 3x^2 - 4ax + \frac{5}{3}a^2 - 3 = 0 \quad (*)$$

このとき、方程式(*)は異なる2つの実数解をもつから、その係数について

$$D/4 = (-2a)^2 - 3\left(\frac{5}{3}a^2 - 3\right) = 9 - a^2 > 0$$

したがって $(a+3)(a-3) < 0$ よって $-3 < a < 3$

(2) $-3 < a < 3$ のとき、2次方程式(*)の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\alpha = \frac{2a - \sqrt{9 - a^2}}{3}, \quad \beta = \frac{2a + \sqrt{9 - a^2}}{3} \quad (**)$$

$g(x) - f(x) = -3(x - \alpha)(x - \beta)$ であるから、 C_a の面積を S_a とすると

$$\begin{aligned} S_a &= \int_{\alpha}^{\beta} \{g(x) - f(x)\} dx = -3 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \sqrt{9 - a^2} \right)^3 = \frac{4}{27} (9 - a^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(3) $-3 < a < 3$ より

$$a = 3 \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

とし、 $\tan \varphi = \frac{1}{2}$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) とおくと

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{5} \sin(\theta - \varphi) \geq -\sqrt{5} \\ \beta &= 2 \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{5} \sin(\theta + \varphi) \leq \sqrt{5} \end{aligned}$$

$y = -2(x - a)^2 + \frac{a^2}{3}$ の x を固定し、 a の関数と考えると

$$y = -\frac{5}{3}a^2 + 4ax - 2x^2 = -\frac{5}{3} \left(a - \frac{6}{5}x \right)^2 + \frac{2}{5}x^2 \quad (-3 < a < 3)$$

$$-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \text{ であるから } -3 < -\frac{6}{\sqrt{5}} \leq \frac{6}{5}x \leq \frac{6}{\sqrt{5}} < 3$$

固定された x について、 $a = \frac{6}{5}x$ のとき、 y は最大、すなわち、 $y \leq \frac{2}{5}x^2$

よって、 $y \geq x^2 - 3$, $y \leq \frac{2}{5}x^2$ を同時に満たす領域の面積を求めればよい.

2つの放物線 $y = x^2 - 3$ と $y = \frac{2}{5}x^2$ の共有点の x 座標は

$$x^2 - 3 = \frac{2}{5}x^2 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm\sqrt{5}$$

したがって、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left\{ \frac{2}{5}x^2 - (x^2 - 3) \right\} dx \\ &= \frac{3}{5} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (\sqrt{5} + x)(\sqrt{5} - x) dx = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} (2\sqrt{5})^3 = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

- 5** (1) n 回目のゲームで初めて A と B の双方が 4 勝以上するのは、次の 2 つの場合である ($n \geq 8$).

[1] $n - 1$ 回目終了時点で A が 3 勝, B が $n - 4$ 勝し, n 回目に A が勝つ.

[2] $n - 1$ 回目終了時点で A が $n - 4$ 勝, B が 3 勝し, n 回目に B が勝つ.

よって、求める確率 x_n は

$$\begin{aligned} x_n &= {}_{n-1}C_3 p^3 (1-p)^{n-4} \times p + {}_{n-1}C_{n-4} p^{n-4} (1-p)^3 \times (1-p) \\ &= \frac{1}{6} (n-1)(n-2)(n-3) p^4 (1-p)^4 \{ (1-p)^{n-8} + p^{n-8} \} \end{aligned}$$

- (2) $p = \frac{1}{2}$ を (1) の結果に代入すると

$$x_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \cdot 2^n} \quad (n \geq 8)$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{3 \cdot 2^n}{(n-1)(n-2)(n-3)} - 1 \\ &= \frac{n}{2(n-3)} - 1 = \frac{6-n}{2(n-3)} < 0 \end{aligned}$$

$x_n > x_{n+1}$ ($n \geq 8$) であるから、 x_n を最大にする n は $n = 8$