

平成16年度 一橋大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
商・経済・法・社会学部 数I・II・A・B 平成16年2月25日

1 H を1辺の長さが1の正六角形とする.

- (1) H の中にある正方形のうち, 1辺が H の1辺と平行なものの面積の最大値を求めよ.
- (2) H の中にある長方形のうち, 1辺が H の1辺と平行なものの面積の最大値を求めよ.

2 a, b, c は整数で, $a < b < c$ をみたす. 放物線 $y = x^2$ 上に3点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$ をとる.

- (1) $\angle BAC = 60^\circ$ とはならないことを示せ. ただし, $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明なしに用いてよい.
- (2) $a = -3$ のとき, $\angle BAC = 45^\circ$ となる組 (b, c) をすべて求めよ.

3 複素数平面上に異なる3点 z, z^2, z^3 がある.

- (1) z, z^2, z^3 が同一直線上にあるような z をすべて求めよ.
- (2) z, z^2, z^3 が二等辺三角形の頂点になるような z の全体を複素数平面上に図示せよ. また, z, z^2, z^3 が正三角形の頂点となるような z をすべて求めよ.

4 a は実数とし, $f(x) = x^3 + ax^2 - 8a^2x$, $g(x) = 3ax^2 - 9a^2x$ とおく.

- (1) 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する直線が存在する. このとき P の座標を a で表せ.
- (2) 次の条件 (i) および (ii) をみたす直線 l が3本存在するような点 (u, v) の範囲を図示せよ.
 - (i) l は点 (u, v) を通る.
 - (ii) l は曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する.

5 n 枚のカードがあり, 1枚目のカードに1, 2枚目のカードに2, $\dots$, n 枚目のカードに n が書かれている. これらの n 枚のカードから無作為に1枚を取り出してもとに戻し, もう一度無作為に1枚を取り出す. 取り出されたカードに書かれている数をそれぞれ x, y とする. また, k を n の約数とする.

- (1) $x + y$ が k の倍数となる確率を求めよ.
- (2) さらに, $k = pq$ とする. ただし, p, q は異なる素数である. xy が k の倍数となる確率を求めよ.

解答例

- 1 (1) H の 6 頂点 A, B, C, D, E, F を座標平面上にとり, $A(1, 0), B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とすると, 直線 AB の方程式は

$$y = -\sqrt{3}(x - 1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

H の一辺に平行で H に内接する正方形の頂点を P_1, P_2, P_3, P_4 とし, P_1 を辺 AB 上の点とすると, 直線 OP_1 の方程式は

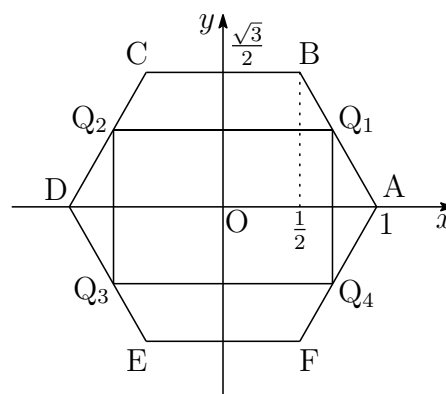
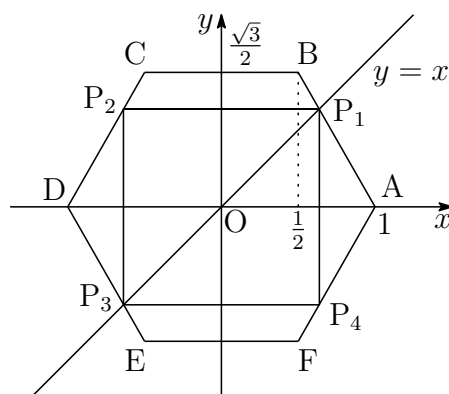
$$y = x \quad \cdots \textcircled{2}$$

P_1 は直線 ① と直線 ② の交点であるから, これらの連立方程式を解いて

$$P_1\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}, \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)$$

正方形 $P_1P_2P_3P_4$ の一辺の長さが $3 - \sqrt{3}$ より, 求める面積の最大値は

$$(3 - \sqrt{3})^2 = 12 - 6\sqrt{3}$$



- (2) H の一辺に平行で H に内接する長方形の頂点を Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 とし, Q_1 を第 1 象限の点とする. この長方形の面積が最大となるとき, Q_1 を辺 AB 上の点 (AB の両端を含む) とすればよい.

$$Q_1(t, \sqrt{3}(1 - t)), \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

とすると, 長方形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ の面積は

$$2t \cdot 2\sqrt{3}(1 - t) = -4\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{3}$$

よって, $t = \frac{1}{2}$ のとき, 最大値 $\sqrt{3}$ をとる.

- 2** (1) 2直線 AB, AC の傾きをそれぞれ m_1, m_2 とすると

$$m_1 = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b$$

$$m_2 = \frac{c^2 - a^2}{c - a} = a + c$$

2直線 AB, AC の偏角をそれぞれ θ_1, θ_2 とする.
 $b < c$ より, $m_1 < m_2$ であるから

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

とおくと, $\angle BAC = \theta_2 - \theta_1$ より

$$\begin{aligned} \tan \angle BAC &= \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_2 \tan \theta_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \\ &= \frac{(a + c) - (a + b)}{1 + (a + c)(a + b)} = \frac{c - b}{1 + (a + c)(a + b)} \end{aligned} \quad (*)$$

$\angle BAC = 60^\circ$ のとき

$$\sqrt{3} = \frac{c - b}{1 - (a + c)(a + b)}$$

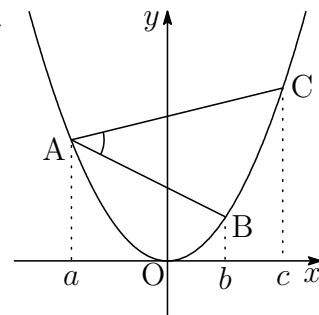
a, b, c は整数であるから, 上式の右辺は有理数であり, 左辺が無理数であることに反する. よって, $\angle BAC = 60^\circ$ とはならない.

- (2) $a = -3$, $\angle BAC = 45^\circ$ のとき, (*) より

$$1 = \frac{c - b}{1 + (-3 + c)(-3 + b)} \quad \text{ゆえに} \quad (b - 4)(c - 2) = -2$$

$b < c$ に注意して $(b - 4, c - 2) = (-2, 1), (-1, 2)$

よって $(b, c) = (2, 3), (3, 4)$



- 3** (1) 複素数平面上の3点 z, z^2, z^3 が異なる点であるから

$$z \neq z^2, \quad z \neq z^3, \quad z^2 \neq z^3 \quad \text{すなわち} \quad z \neq 0, \pm 1$$

このとき、3点 z, z^2, z^3 が同一直線上にあるから

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} = \frac{z(z+1)(z-1)}{z(z-1)} = z+1$$

は実数である．よって、 z は $z \neq 0, \pm 1$ の実数

- (2) (1)の結果から、 z が実数であるとき ($z = 0, \pm 1$ も含めて)、 z, z^2, z^3 は同一直線上にある．したがって、 z が実数でないことが、これらの3点が二等辺三角形となるための必要条件である．実数でない z に対して、 $A(z), B(z^2), C(z^3)$ とする．このとき、 $\triangle ABC$ が二等辺三角形となるのは、次の3つの場合である．

(i) $AB = AC$ のとき $|z^2 - z| = |z^3 - z|$

$$|z||z-1| = |z||z+1||z-1| \quad \text{すなわち} \quad |z+1| = 1, \quad z \neq -2, 0$$

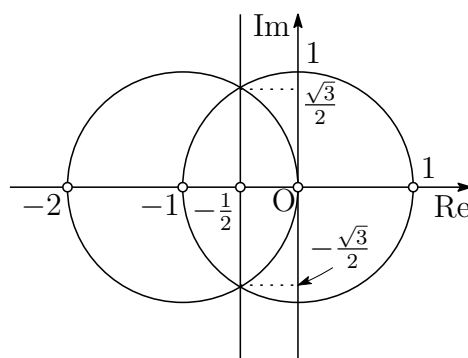
(ii) $BA = BC$ のとき $|z^2 - z| = |z^3 - z^2|$

$$|z||z-1| = |z|^2|z-1| \quad \text{すなわち} \quad |z| = 1, \quad z \neq \pm 1$$

(iii) $CA = CB$ のとき $|z^3 - z| = |z^3 - z^2|$

$$|z||z+1||z-1| = |z|^2|z-1| \quad \text{すなわち} \quad |z+1| = |z|, \quad z \neq -\frac{1}{2}$$

3点 z, z^2, z^3 が二等辺三角形となる点 z の全体は次のようになる．



3点 z, z^2, z^3 が正三角形となる点 z の全体は、(i)～(iii) のいずれか2つを同時にみたす点 z であるから

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

- 4 (1) $f(x) = x^3 + ax^2 - 8a^2x$, $g(x) = 3ax^2 - 9a^2x$ (a は実数) より

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 8a^2, \quad g'(x) = 6ax - 9a^2$$

このとき, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の x 座標は

$$x^3 + ax^2 - 8a^2x = 3ax^2 - 9a^2x \quad \text{ゆえに} \quad x(x-a)^2 = 0$$

$$x = 0, a \text{ のとき} \quad f'(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad f'(a) = -3a^2, \quad g'(a) = -3a^2$$

$$\text{以上の結果から} \quad f(0) = g(0) = 0, \quad f'(0) = g'(0)$$

$$f(a) = g(a) = -6a^3, \quad f'(a) = g'(a)$$

よって, 求める点 P の座標は $(a, -6a^3)$

- (2) (1) の結果から, l は点 $(a, -6a^3)$ を通り, 傾き $-3a^2$ の直線であるから

$$y + 6a^3 = -3a^2(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = -3a^2x - 3a^3$$

l が点 (u, v) を通るから

$$v = -3a^2u - 3a^3 \quad a \text{ について整理すると} \quad 3a^3 + 3ua^2 + v = 0$$

$$h(a) = 3a^3 + 3ua^2 + v \text{ とおくと}$$

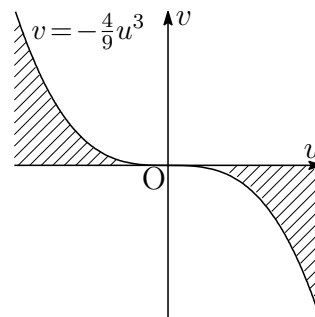
$$h'(a) = 9a^2 + 6ua = 9a \left(a + \frac{2}{3}u \right)$$

$$h'(a) = 0 \text{ とすると} \quad a = 0, -\frac{2}{3}u$$

$$h(0)h\left(-\frac{2}{3}u\right) < 0 \text{ を満たせばよいから}$$

$$v \left(v + \frac{4}{9}u^3 \right) < 0$$

よって, 求める点 (u, v) のとる領域は, 図の斜線部分で境界線を含まない.



- 5 (1) k は n の約数であるから、整数 l を $l = \frac{n}{k}$ とする.

$U = \{1, 2, \dots, n\}$ を全体集合とし、1 から n の自然数で k で割った余りが r となる集合を $A_r (r = 0, 1, 2, \dots, k)$ とし、 A_k と A_0 は同一とすると、 A_r の要素の個数は l である. $x + y$ が k の倍数であるから

$$x \in A_j \text{ のとき } y \in A_{k-j} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, k-1)$$

このとき、 (x, y) の組の総数は $l^2 k$

$$\text{よって、求める確率は} \quad \frac{l^2 k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{k}\right)^2 k = \frac{1}{k}$$

- (2) 2 数の積 xy が pq の倍数となる (x, y) の組の個数を求める.

(i) 一方が p の倍数で q の倍数でない. 他方が q の倍数で p の倍数でない.

$$2 \left(\frac{n}{p} - \frac{n}{pq} \right) \left(\frac{n}{q} - \frac{n}{pq} \right)$$

(ii) 一方が pq の倍数で、他方が pq の倍数でない.

$$2 \times \frac{n}{pq} \left(n - \frac{n}{pq} \right)$$

(iii) とともに pq の倍数である.

$$\left(\frac{n}{pq} \right)^2$$

(i)~(iii) より、 (x, y) の組の総数は

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{n}{p} - \frac{n}{pq} \right) \left(\frac{n}{q} - \frac{n}{pq} \right) + 2 \times \frac{n}{pq} \left(n - \frac{n}{pq} \right) + \left(\frac{n}{pq} \right)^2 \\ &= \frac{n^2}{p^2 q^2} (4pq - 2p - 2q + 1) = \frac{n^2}{p^2 q^2} (2p - 1)(2q - 1) \end{aligned}$$

$$\text{よって、求める確率は} \quad \frac{(2p - 1)(2q - 1)}{p^2 q^2}$$

別解 x, y がともに p の倍数となる事象を A とし, x, y がともに q の倍数となる事象を B とする. A, B の要素の個数をそれぞれ $N(A), N(B)$ とすると

$$\begin{aligned} N(\overline{A}) &= \left(n - \frac{n}{p}\right)^2 = n^2 \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \\ N(\overline{B}) &= \left(n - \frac{n}{q}\right)^2 = n^2 \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 \\ N(\overline{A} \cap \overline{B}) &= \left(n - \frac{n}{p} - \frac{n}{q} + \frac{n}{pq}\right)^2 = n^2 \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} N(A \cap B) &= n^2 - N(\overline{A \cap B}) = n^2 - N(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= n^2 - \{N(\overline{A}) + N(\overline{B}) - N(\overline{A} \cap \overline{B})\} \\ &= n^2 - n^2 \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 - n^2 \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 + n^2 \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 \\ &= n^2 \left\{1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2\right\} \left\{1 - \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2\right\} \\ &= n^2 \left(\frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}\right) \left(\frac{2}{q} - \frac{1}{q^2}\right) = \frac{n^2(2p-1)(2q-1)}{p^2q^2} \end{aligned}$$

よって, 求める確率は $\frac{(2p-1)(2q-1)}{p^2q^2}$