

平成14年度 一橋大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
商・経済・法・社会学部 数I・II・A・B 平成14年2月25日

- 1 k, x, y は正の整数とする. 三角形の3辺の長さが $\frac{k}{x}, \frac{k}{y}, \frac{1}{xy}$ で, 周の長さが $\frac{25}{16}$ である. k, x, y を求めよ.
- 2 $r > 0$ とし, $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおく. 任意の角 θ に対し, 複素数平面上で点 $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ と実軸との距離は2以下である. r のとりうる範囲を求めよ.
- 3 a, b, c は0以上の実数とする. 3点 $A(a, 0), B(0, b), C(1, c)$ は, $\angle ABC = 30^\circ, \angle BAC = 60^\circ$ をみたす.
- (1) c を求めよ.
- (2) AB の長さの最大値と最小値を求めよ.
- 4 頂点が z 軸上にあり, 底面が xy 平面上の原点を中心とする円である円すいがある. この円すいの側面が, 原点を中心とする半径1の球に接している.
- (1) 円すいの表面積の最小値を求めよ.
- (2) 円すいの体積の最小値を求めよ.
- 5 最初の試行で3枚の硬貨を同時に投げ, 裏が出た硬貨を取り除く. 次の試行で残った硬貨を同時に投げ, 裏が出た硬貨を取り除く. 以下この試行をすべての硬貨が取り除かれるまで繰り返す.
- (1) 試行が1回めで終了する確率 p_1 , および2回めで終了する確率 p_2 を求めよ.
- (2) 試行が n 回以上行われる確率 q_n を求めよ.

解答例

1 $\frac{k}{x}, \frac{k}{y}, \frac{1}{xy}$ が三角形の3辺の長さであるから、三角形の成立条件から

$$\left| \frac{k}{x} - \frac{k}{y} \right| < \frac{1}{xy} < \frac{k}{x} + \frac{k}{y} \quad \text{ゆえに} \quad |k(y-x)| < 1$$

k, x, y は正の整数であるから $y-x=0$ ゆえに $y=x$

したがって、3辺の長さ $\frac{k}{x}, \frac{k}{x}, \frac{1}{x^2}$ の三角形の周の長さが $\frac{25}{16}$ であるから

$$\frac{k}{x} + \frac{k}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{25}{16} \quad \text{ゆえに} \quad 16(2kx+1) = 25x^2$$

$2kx+1$ は奇数であるから、上の第2式から、 $x=4y$ とおくと (y は整数)

$$8ky+1 = 25y^2 \quad \text{ゆえに} \quad 1 = y(25y-8k)$$

これから、 $y=1$ であるから

$$1 = 25 - 8k \quad \text{これを解いて} \quad k = 3 \quad \text{また} \quad x = 4y = 4$$

2 $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ より ($r > 0$)

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{1}{\alpha} &= r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta \end{aligned}$$

点 $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ の実軸からの距離は $\left|r - \frac{1}{r}\right| |\sin \theta|$

任意の角 θ について、その距離が2以下であるから

$$\left|r - \frac{1}{r}\right| \leq 2 \quad \text{ゆえに} \quad \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \leq 4$$

したがって $(r^2 - 1)^2 - 4r^2 \leq 0$

$$(r^2 + 2r - 1)(r^2 - 2r - 1) < 0 \quad (*)$$

$(r^2 + 2r - 1)(r^2 - 2r - 1) = 0$ を解くと

$$r = \pm 1 \pm \sqrt{2} \quad (\text{複号任意})$$

よって、 $r > 0$ に注意して、(*) を解くと

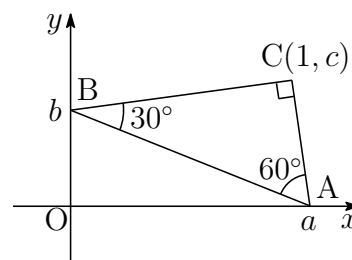
$$-1 + \sqrt{2} \leq r \leq 1 + \sqrt{2}$$

3 (1) $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(1, c)$ より

$$AB^2 = a^2 + b^2$$

$$BC^2 = 1 + (b - c)^2$$

$$CA^2 = (a - 1)^2 + c^2$$



条件より, $BC^2 + CA^2 = AB^2$ であるから

$$1 + (b - c)^2 + (a - 1)^2 + c^2 = a^2 + b^2$$

整理すると $a - 1 = c(c - b)$ … ①

条件より, $3CA^2 = BC^2$ であるから

$$3\{(a - 1)^2 + c^2\} = 1 + (b - c)^2$$

① を代入すると $3\{c^2(c - b)^2 + c^2\} = 1 + (b - c)^2$

$$(3c^2 - 1)\{(b - c)^2 + 1\} = 0$$

$(b - c)^2 + 1 \neq 0$ であるから $c > 0$ により $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

補足 $\overrightarrow{CA} = (a - 1, -c) \perp \overrightarrow{CB} = (-1, b - c)$ であるから, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ より

$$-(a - 1) - c(b - c) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a - 1 = c(c - b)$$

(2) $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を ① に代入して整理すると $b = \frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}a$

$a \geq 0$, $b \geq 0$ であるから $0 \leq a \leq \frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} AB^2 &= a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}a\right)^2 \\ &= 4a^2 - 8a + \frac{16}{3} = 4(a - 1)^2 + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

よって 最大値 $\frac{4}{\sqrt{3}}$, 最小値 $\frac{2}{\sqrt{2}}$

補足 $CA^2 = (a - 1)^2 + c^2 = (a - 1)^2 + \frac{1}{3}$ より $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq CA \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

$AB = 2CA$ より $\frac{2}{\sqrt{3}} \leq AB \leq \frac{4}{\sqrt{3}}$ よって 最大値 $\frac{4}{\sqrt{3}}$, 最小値 $\frac{2}{\sqrt{2}}$

- 4 (1) 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の第1象限の点 (a, b) における接線は $ax + by = 1$

この接線の x 軸, y 軸との交点は, それぞれ $\left(\frac{1}{a}, 0\right), \left(0, \frac{1}{b}\right)$

円錐の母線の長さは $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}} = \frac{1}{ab}$

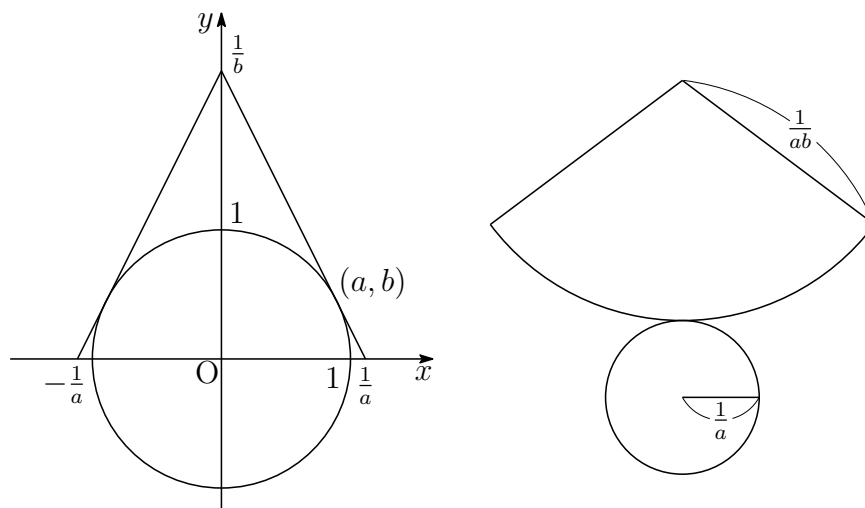
円錐の表面積を S とすると

$$S = \pi \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{1}{ab} = \frac{\pi(b+1)}{a^2 b} = \frac{\pi(b+1)}{(1-b^2)b} = \frac{\pi}{b(1-b)}$$

このとき $b(1-b) = -\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ ($0 < b < 1$) より $S \geq 4\pi$

よって, 求める最小値は 4π

補足 $b + (1-b) \geq 2\sqrt{b(1-b)}$ より $b(1-b) \leq \frac{1}{4}$



- (2) 円錐の体積を V とすると $V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{a}\right)^2 \frac{1}{b} = \frac{\pi}{3a^2 b} = \frac{\pi}{3(1-b^2)b}$

$f(b) = 3(1-b^2)b = 3(b-b^3)$ とおくと ($0 < b < 1$) $f'(b) = 3(1-3b^2)$

b	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	(1)
$f'(b)$		+	0	-	
$f(b)$		↗	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	↘	

したがって $V \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ よって 最小値 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

補足 $1 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + b^2 \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{2}\right)^2 b^2} = 3\left(\frac{a^2 b}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ ゆえに $\frac{1}{3a^2 b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

- 5 (1) j 枚の硬貨を同時に投げて k 枚残る確率を (j, k) とすると $(0 \leq k \leq j)$

$$(j, k) = \frac{{}_j C_k}{2^j}$$

求める確率は

$$\begin{aligned} p_1 &= (3, 0) = \frac{{}_3 C_0}{2^3} = \frac{1}{8} \\ p_2 &= (3, 3)(3, 0) + (3, 2)(2, 0) + (3, 1)(1, 0) \\ &= \frac{{}_3 C_3}{2^3} \cdot \frac{{}_3 C_0}{2^3} + \frac{{}_3 C_2}{2^3} \cdot \frac{{}_2 C_0}{2^2} + \frac{{}_3 C_1}{2^3} \cdot \frac{{}_1 C_0}{2} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{64} \end{aligned}$$

- (2) 特定の硬貨が n 回投げられる確率は $\frac{1}{2^{n-1}}$

これから、この硬貨の n 回目の試行が起きない確率は

$$1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

硬貨 3 枚すべてが n 回目の試行が起きない確率 $1 - q_n$ は

$$1 - q_n = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^3$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} q_n &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^3 \\ &= \frac{3}{2^{n-1}} - \frac{3}{4^{n-1}} + \frac{1}{8^{n-1}} \end{aligned}$$

補足 n 回目の試行で残った硬貨の枚数が 3 枚, 2 枚, 1 枚である確率を, それぞれ a_n, b_n, c_n とすると, 次の確率漸化式が成立する.

$$\begin{aligned} a_1 &= (3, 3), \quad b_1 = (3, 2), \quad c_1 = (3, 1) \\ a_{n+1} &= a_n(3, 3) \end{aligned} \tag{A}$$

$$b_{n+1} = a_n(3, 2) + b_n(2, 2) \tag{B}$$

$$c_{n+1} = a_n(3, 1) + b_n(2, 1) + c_n(1, 1) \tag{C}$$

$$(A) \text{ より } a_1 = \frac{1}{8}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{8}a_n \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \frac{1}{8^n}$$

これを (B) に代入すると

$$b_{n+1} = \frac{3}{8^{n+1}} + \frac{1}{4}b_n \quad \text{ゆえに} \quad 4^{n+1}b_{n+1} - 4^n b_n = \frac{3}{2^{n+1}}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (4^{k+1}b_{k+1} - 4^k b_k) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3}{2^{k+1}} \\ 4^n b_n - 4b_1 &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2^n} \quad \text{ゆえに} \quad b_n = 3 \left(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{8^n} \right) \end{aligned} \tag{*}$$

(*) は, $n = 1$ のときも成立する.

以上の結果を (C) に代入すると

$$c_{n+1} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8^n} + \frac{1}{2} \cdot 3 \left(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{8^n} \right) + \frac{1}{2}c_n$$

$$\text{整理すると} \quad 2^{n+1}c_{n+1} - 2^n c_n = -\frac{9}{4^{n+1}} + \frac{3}{2^n}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k+1}c_{k+1} - 2^k c_k) &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{9}{4^{k+1}} + \frac{3}{2^k} \right) \\ 2^n c_n - 2c_1 &= -\frac{3}{4} + \frac{3}{4^n} + 3 - \frac{3}{2^{n-1}} \\ c_n &= 3 \left(\frac{1}{2^n} - \frac{2}{4^n} + \frac{1}{8^n} \right) \end{aligned} \tag{**}$$

(**) は $n = 1$ のときも成立する. 求める確率 q_n は

$$q_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = \frac{3}{2^{n-1}} - \frac{3}{4^{n-1}} + \frac{1}{8^{n-1}}$$